

Università degli Studi Roma Tre  
Corso di laurea in Matematica A.A. 2013-2014  
GE110 - Geometria 1  
Foglio n.7 - Antonio Cigliola

**Esercizio 1.** Al variare del parametro  $k$ , determinare il rango delle seguenti matrici:

$$(i) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ k & k & k \end{pmatrix}$$

$$(ii) \begin{pmatrix} 2 & k & 0 & 2 \\ k & 2 & 0 & k \\ 1 & 0 & k & k \end{pmatrix}$$

$$(iii) \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -k & -1 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 2.** Applicando la definizione, calcolare in maniera esplicita il determinante di una matrice di tipo  $3 \times 3$ .

**Esercizio 3.** Calcolare i seguenti determinanti:

$$(i) \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(iv) \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(v) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 10 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(vi) \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(vii) \det \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}$$

**Esercizio 4.** Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni:

$$(i) \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix} = 0$$

$$(ii) \det \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x & x & 1 \\ x & x & x \end{pmatrix} = 0$$

$$(iii) \det \begin{pmatrix} x & x & 1 \\ 1 & x & x \\ x & 1 & x \end{pmatrix} \geq 0$$

$$(iv) \det \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ x & x & 1 \\ x & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} < 0$$

**Esercizio 5.** Dimostrare che valgono le seguenti eguaglianze:

$$(i) \det \begin{pmatrix} 1+x & 1+y & 1 \\ 1+x_1 & 1+y_1 & 1 \\ 1+x_2 & 1+y_2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \det \begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \det \begin{pmatrix} a & b & ab \\ b & c & bc \\ c & a & ac \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & ac & bc \\ 1 & ab & ac \\ 1 & bc & ab \end{pmatrix}$$

$$(iv) \det \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & x_3 + y_3 \\ y_1 + z_1 & y_2 + z_2 & y_3 + z_3 \\ x_1 + z_1 & x_2 + z_2 & x_3 + z_3 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 6.** Discutere e risolvere i seguenti sistemi lineari parametrici in  $\mathbb{R}$ :

$$(i) \begin{cases} x + 2y + hz - t = 1 \\ (h-1)y + (1-h)t = h \\ x + 3y + 2z - ht = 3 \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} kx + y = 2k - 3 \\ 2x - ky = 3k + 4 \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} ax + y = 1 - 2a \\ x + by = b - 2 \end{cases}$$

$$(iv) \begin{cases} (a - 2)x + ay = -a \\ (2 - a)x + (2 + a)y = -a^2 \end{cases}$$

$$(v) \begin{cases} x + 2y + hz - t = 1 \\ (h - 1)y + (1 - h)t = h \\ x + 3y + 2z - ht = 3 \end{cases}$$

$$(vi) \begin{cases} 3x - ay + 2z = 0 \\ ax - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$(vii) \begin{cases} ax + by = 1 \\ x + y = b \end{cases}$$

$$(viii) \begin{cases} 2x + ky = -3 \\ 6x + 3ky = k \\ 2x - y = -2 \end{cases}$$

$$(ix) \begin{cases} ax + y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 1 \\ x + 3y + az = 1 \end{cases}$$

$$(x) \begin{cases} kx + y + z = k + 2 \\ x + ky + z = k + 2 \\ x + y + kz = k + 2 \end{cases}$$

$$(xi) \begin{cases} ax_2 + 3x_3 - ax_4 = 2 \\ ax_1 + 2ax_2 - x_3 = a \\ ax_1 + ax_2 - 4x_3 + ax_4 = a - 1 \end{cases}$$

$$(xii) \begin{cases} kx + z = 1 \\ x + z = 1 \\ hx + kz = h + k \\ hx + y = h \end{cases}$$

**Esercizio 7.** Discutere e risolvere il seguente sistema lineare al variare di  $k \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{cases} kx + y = 2k - 3 \\ 2x - ky = 3k + 4 \end{cases}$$