

**ESERCIZI CONSIGLIATI - ANALISI MATEMATICA 2**  
**INGEGNERIA ENERGETICA A.A. 2015/16**

UMBERTO MONTEMAGNO

• **Esercizio 1**

Studiare la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti successioni:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x^2 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -n^2 (x - \frac{1}{n})^2 + n & \text{se } x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \\ 0 & \text{se } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} nx + 1 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -nx + 3 & \text{se } x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \\ 1 & \text{se } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1 - \frac{1}{n}] \\ -n|x - 1| + 2 & \text{se } x \in (1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) \\ 1 & \text{se } x \in [1 + \frac{1}{n}, 2] \end{cases}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1] \\ n(x - 1) & \text{se } x \in (1, 1 + \frac{1}{n}) \\ 1 & \text{se } x \in [1 + \frac{1}{n}, 2] \end{cases}$$

$$f_n(x) = e^{-n|x|}, f_n(x) = e^{-nx}, f_n(x) = e^{-nx^2}, f_n(x) = e^{-\frac{x}{n}}, f_n(x) = e^{-\frac{|x|}{n}}, \\ f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}}$$

• **Esercizio 2**

Mostrare o confutare la validità dell'uguaglianza per le successioni degli esercizi precedenti (estendendo le funzioni a zero ove non fossero definite)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

per le seguenti coppie di  $a$  e  $b$ :

---

*Date:* 22 maggio 2016.

$$a = 0, b = 1; a = -1, b = 1; a = -\infty, b = 0; a = 0, b = \infty, \\ a = 0, b = K \text{ (con } K \in \mathbb{R}\text{)}$$

• **Esercizio 3**

Svolgere (ove possibile) gli esercizi precedenti controllando la convergenza uniforme della derivata

• **Esercizio 4**

Studiare convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni e delle loro derivate prime

$$f_n(x) = [\arctan(nx)]^2, f_n(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right), f_n(x) = x\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

Valutare inoltre se è possibile invertire i segni di integrazione e derivazione negli insiemi  $[0, 1]$ ,  $[-1, 1]$ ,  $[1, 2]$

• **Esercizio 5**

Esercizi 1.6 - 1.7 - 1.8 - 1.10 - 1.11 - 1.12 - 1.13 - 1.15 - 1.18 - 1.19 - 1.20 - 1.24 dal link

<http://www.math.unipd.it/~fabio/didattica/2mat/1esercizi.pdf>

*N.B. In fondo al file ci sono le soluzioni*

• **Esercizio 6**

Studiare la convergenza delle seguenti serie di funzioni, indicando se e quando è possibile invertire i segni di integrale e derivata con quello di serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{x+n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} [\arctan((n+1)x) - \arctan(nx)], \quad \sum_{n=1}^{\infty} [\sin(nx) - \sin((n-1)x)]$$

• **Esercizio 7**

Svolgere gli esercizi 1.37 - 1.41 - 1.43 (solo parte 1) del link

<http://www.math.unipd.it/~fabio/didattica/2mat/1esercizi.pdf>

- **Esercizio 8**

Svolgere gli esercizi 1.6.1 - 1.6.2 - 1.6.3 - 1.6.5 dal link

<http://calvino.polito.it/~terzafac/Corsi/analisi2/pdf/seriepotenze-svolti.pdf>

- **Esercizio 9**

Svolgere gli esercizi 1.6.6 - 1.6.7 - 1.6.8 dal link

<http://calvino.polito.it/~terzafac/Corsi/analisi2/pdf/seriepotenze-svolti.pdf>

- **Esercizio 10**

Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor in  $x = 0$  delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

- **Esercizio 10**

Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor in  $x = 1$  delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1}, \quad f(x) = \frac{\sin(x - 1)}{x - 1}$$

- **Esercizio 11**

Calcolare la somma delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln(3))^{2n-4}}{(n-2)!}$$

- **Esercizio 12**

Utilizzare la teoria delle serie di potenze per fornire una stima alla terza cifra decimale di

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad \int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad \int_{-3}^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- **Esercizio 13**

Svolgere gli esercizi 1.46 - 1.47 - 1.48 - 1.49 - 1.50 dal link

<http://www.math.unipd.it/~fabio/didattica/2mat/1esercizi.pdf>

- **Esercizio 14**

Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier e determinare il tipo di convergenza delle seguenti funzioni

$$f(x) = \sin^2(x), \quad f(x) = \sin(x) \cos(x),$$

$$f(x) = \sin^3(x) \cos(x)$$

- **Esercizio 15**

Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier e determinare il tipo di convergenza delle estensioni periodiche su  $\mathbb{R}$  delle seguenti funzioni

$$f(x) = x^2 \text{ in } [0, 2\pi], \quad f(x) = x^2 \text{ in } [-\pi, \pi]$$

- **Esercizio 16**

Determinare il tipo di convergenza delle estensioni periodiche su  $\mathbb{R}$  delle seguenti funzioni

$$f(x) = (x - \pi)^3(x + \pi)^3 \text{ in } [-\pi, \pi], \quad f(x) = \pi - |x| \text{ in } [-\pi, \pi],$$

$$f(x) = |\pi - x| \text{ in } [-\pi, \pi]$$

- **Esercizio 17**

Determinare il tipo di convergenza delle estensioni periodiche su  $\mathbb{R}$  delle seguenti funzioni

$$f(x) = (x - 1)^3(x + 2)^3 \text{ in } [-2, 1], \quad f(x) = 3 - |x| \text{ in } [-3, 3],$$

$$f(x) = |1 - x| \text{ in } [-1, 1]$$

- **Esercizio 18**

Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier e determinare il tipo di convergenza delle estensioni periodiche su  $\mathbb{R}$  delle seguenti funzioni

$$f(x) = x^2 \text{ in } [0, 2], \quad f(x) = x^2 \text{ in } [-1, 1], \quad f(x) = x \text{ in } [0, 1]$$

- **Esercizio 19**

Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier e determinare il tipo di convergenza delle seguenti funzioni

$$f(x) = \sin^2(\pi x) \text{ (in } [0,1]) \text{ , } \quad f(x) = \sin(\pi x) \cos(2\pi x) \text{ (in } [-1,1]),$$

- **Esercizio 20**

Svolgere gli esercizi 1 e 3 dal link

<http://calvino.polito.it/~terzafac/Corsi/analisi2/pdf/piuvar-svolti.pdf>

- **Esercizio 21**

Svolgere gli esercizi del link

[http://dm.ing.unibs.it/~riccarda.rossi/Teaching/esercizi%20svolti%20aa.%202009-2010/esercizi\\_limiti-continuita.pdf](http://dm.ing.unibs.it/~riccarda.rossi/Teaching/esercizi%20svolti%20aa.%202009-2010/esercizi_limiti-continuita.pdf)

- **Esercizio 22**

Svolgere gli esercizi da 3.3.1 a 3.3.18 (un numero sufficiente per avere dimestichezza con i limiti in due variabili) del link

<http://www.di.univr.it/documenti/OccorrenzaIns/matdid/matdid998907.pdf>

- **Esercizio 23**

Svolgere gli esercizi da 3.4.4 a 3.5.2 (un numero sufficiente per avere dimestichezza con derivabilità in più variabili) del link

<http://www.di.univr.it/documenti/OccorrenzaIns/matdid/matdid998907.pdf>

- **Esercizio 25**

Svolgere gli esercizi 3.4.2, 3.5.2, 3.5.5, da 3.6.1 a 3.6.5, 3.7.1, 3.7.2, 3.8.2, 3.8.3, 3.8.4 dal link

<http://www.di.univr.it/documenti/OccorrenzaIns/matdid/matdid998907.pdf>

- **Esercizio 26**

Svolgere gli esercizi 3.9.1, 3.10.1, 3.10.2, **3.10.3**<sup>1</sup> dal link

<http://www.di.univr.it/documenti/OccorrenzaIns/matdid/matdid998907.pdf>

- **Esercizio 27**

Svolgere gli esercizi da 3.11.1 a 3.11.8 dal link

<http://www.di.univr.it/documenti/OccorrenzaIns/matdid/matdid998907.pdf>

- **Esercizio 28**

Svolgere gli esercizi da 3.11.9 a 3.11.12 dal link

<http://www.di.univr.it/documenti/OccorrenzaIns/matdid/matdid998907.pdf>

- **Esercizio 29**

Calcolare il gradiente di  $f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ , cosa si può dedurre?

- **Esercizio 30**

Calcolare le direzioni di massima e minima pendenza nell'origine e nel punto generico  $(x_0, y_0)$  delle seguenti funzioni

$$f(x, y) = e^{\sin x + \sin y}, \quad f(x, y) = \sin(xy), \quad f(x, y) = \arctan\left(\frac{1}{1 + x^2 + y^2}\right)$$

- **Esercizio 31**

Calcolare il gradiente della seguente funzione

$$F(x, y, z) = \int_{g(x, y, z)}^{h(x, y, z)} f(x, y, z, t) dt$$

specializzare il risultato per le terne di funzioni

---

<sup>1</sup>aggiunto il 31 Marzo 2015

$$g(x, y, z) = e^x z, \quad h(x, y, z) = \sin y, \quad f(x, y, z, t) = zt^2$$

$$g(x, y, z) = \cos(xyz), \quad h(x, y, z) = x^2, \quad f(x, y, z, t) = xyz \sin t$$

$$g(x, y, z) = y^2, \quad h(x, y, z) = x^2, \quad f(x, y, z, t) = e^{ty}$$

• **Esercizio 32**

Calcolare il gradiente della funzione  $F(x, y, z) = f(g(x, y, z), h(x, y, z), z)$   
specializzare il risultato per le terne di funzioni

$$g(x, y, z) = e^x z, \quad h(x, y, z) = \sin y, \quad f(x, y, z) = z$$

$$g(x, y, z) = \cos(xyz), \quad h(x, y, z) = x^2, \quad f(x, y, z) = xyz$$

$$g(x, y, z) = y^2, \quad h(x, y, z) = x^2, \quad f(x, y, z) = e^y$$

• **Esercizio 33**

Calcolare il gradiente della funzione  $F(x, y, z) = f(x, h(x, y, z), z)$   
specializzare il risultato per le terne di funzioni

$$g(x, y, z) = e^x z, \quad h(x, y, z) = \sin y, \quad f(x, y, z) = z$$

$$g(x, y, z) = \cos(xyz), \quad h(x, y, z) = x^2, \quad f(x, y, z) = xyz$$

$$g(x, y, z) = y^2, \quad h(x, y, z) = x^2, \quad f(x, y, z) = e^y$$

• **Esercizio 34**

Calcolare il gradiente della funzione  $F(x, y, z) = g(f(x, y, y), f(x, x, y), f(z, z, z))$   
specializzare il risultato per le terne di funzioni

$$g(x, y, z) = e^x z, \quad h(x, y, z) = \sin y, \quad f(x, y, z) = z$$

$$g(x, y, z) = \cos(xyz), \quad h(x, y, z) = x^2, \quad f(x, y, z) = xyz$$

$$g(x, y, z) = y^2, \quad h(x, y, z) = x^2, \quad f(x, y, z) = e^y$$

- **Esercizio 35**

Calcolare il gradiente della funzione  $F(x, y, z) = f(x, g(x, x, x), h(x, x, x))$

specializzare il risultato per le terne di funzioni

$$g(x, y, z) = e^x z, \quad h(x, y, z) = \sin y, \quad f(x, y, z) = z$$

$$g(x, y, z) = \cos(xyz), \quad h(x, y, z) = x^2, \quad f(x, y, z) = xyz$$

$$g(x, y, z) = y^2, \quad h(x, y, z) = x^2, \quad f(x, y, z) = e^y$$

- **Esercizio 36**

Svolgere gli esercizi da 8, 9, 10 dal link

<http://calvino.polito.it/~terzafac/Corsi/analisi2/pdf/piuvar-svolti.pdf>

- **Esercizio 37**

Calcolare i polinomi di Taylor al nono ordine delle funzioni dell'esercizio 30 e dell'esercizio 14

- **Esercizio 38**

Calcolare massimi e minimi assoluti e relativi della funzione  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y$  nel dominio

$$D = \{1 \leq (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 4\}$$

- **Esercizio 39**

Calcolare massimi e minimi assoluti e relativi della funzione  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10$  nel dominio

$$D = \{1 \leq x^2 + (y - 2)^2 \leq 4\}$$

- **Esercizio 40**

Svolgere gli esercizi 1 e 11 dal link

<http://calvino.polito.it/~terzafac/Corsi/analisi2/pdf/piuvar-svolti.pdf>

- **Esercizio 41**

Indicare (se esistono) i massimi e minimi delle funzioni dell'esercizio precedente nei domini

$$\begin{aligned}
 D &= \{x^2 + y^2 \leq 1\} \\
 D &= \{x^2 + y^2 < 1\} \\
 D &= \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \\
 E &= \{1 \leq (x - 1)^2 + y^2 \leq 4\} \\
 &\text{intersezione tra } D \text{ e } E
 \end{aligned}$$

- **Esercizio 42**

Calcolare lunghezza, vettore tangente, versore tangente, versore normale, vettore normale, curvatura, raggio di curvatura della curva

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^2), \quad t \in [-1, 1]$$

- **Esercizio 43**

Calcolare lunghezza, vettore tangente, versore tangente, versore normale, vettore normale, curvatura, raggio di curvatura della curva

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, 1), \quad t \in [-\pi, \pi]$$

- **Esercizio 44**

Calcolare lunghezza, vettore tangente, versore tangente, versore normale, vettore normale, curvatura, raggio di curvatura della curva (con  $a$  e  $b$  positivi)

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

- **Esercizio 45**

Calcolare lunghezza, vettore tangente, versore tangente, versore normale, vettore normale, curvatura, raggio di curvatura della curva (in forma polare)

$$\rho(\vartheta) = 1 - \cos \vartheta, \quad t \in [0, 2\pi]$$

- **Esercizio 46**

Calcolare lunghezza, vettore tangente, versore tangente, versore normale, vettore normale, curvatura, raggio di curvatura della curva (in forma polare)

$$\rho(\vartheta) = \theta, \quad t \in [0, 2\pi]$$

- **Esercizio 47**

Svolgere gli esercizi 12 e 13 dal link

<http://calvino.polito.it/~terzafac/Corsi/analisi2/pdf/piuvar-svolti.pdf>

- **Esercizio 48**

Svolgere gli esercizi dal link

<http://www.mat.unimi.it/users/penati/didattica/EAMAGA/INT-CURV.pdf>

- **Esercizio 49**

Indicare quali campi vettoriali dell'esercizio precedente possono essere scritti come gradiente di una funzione scalare e, in caso affermativo, specificarne il dominio

- **Esercizio 50**

Svolgere l'esercizio 4 (area di domini) dal link

<http://www.dmmm.uniroma1.it/~silvia.marconi/sito/analisi2ingcivile/esan2ingciv.pdf>

- **Esercizio 51**

Svolgere i primi tre esercizi dal link

[http://calvino.polito.it/~nicola/analisi-II/Esercizi%20svolti%20e%20Temi%20d'esame/Esercizi/svol\\_integrals\\_doppi.pdf](http://calvino.polito.it/~nicola/analisi-II/Esercizi%20svolti%20e%20Temi%20d'esame/Esercizi/svol_integrals_doppi.pdf)

- **Esercizio 52**

Svolgere gli esercizi riguardanti gli integrali e forme 2D dal link

[http://calvino.polito.it/~nicola/analisi-II/Esercizi%20svolti%20e%20Temi%20d'esame/Esercizi/svol\\_forme\\_e\\_campi.pdf](http://calvino.polito.it/~nicola/analisi-II/Esercizi%20svolti%20e%20Temi%20d'esame/Esercizi/svol_forme_e_campi.pdf)

- **Esercizio 53**

Svolgere gli esercizi riguardanti gli integrali e forme 2D dal link

<http://www00.unibg.it/dati/corsi/8911/8578-divergenza.pdf>

- **Esercizio 55**

Svolgere gli esercizi dal link

[http://calvino.polito.it/~nicola/analisi-II/Esercizi%20svolti%20e%20Temi%20d'esame/Esercizi/svol\\_integrals\\_tripli.pdf](http://calvino.polito.it/~nicola/analisi-II/Esercizi%20svolti%20e%20Temi%20d'esame/Esercizi/svol_integrals_tripli.pdf)

- **Esercizio 55**

Svolgere gli esercizi su Teorema di Stokes e Divergenza in tre dimensioni nei link precedenti

- **Esercizio 56**

Svolgere gli esercizi sul teorema del Dini e su massimi e minimi vincolati dal link

<http://www.di.univr.it/documenti/0ccorrenzaIns/matdid/matdid998907.pdf>