

Università degli Studi Roma Tre  
Corso di laurea in Matematica A.A. 2014-2015  
AL310 - Istituzioni di Algebra Superiore  
Esercitazione n.1  
Antonio Cigliola

**Esercizio 1.** Fattorizzare su  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Z}_2$  e  $\mathbb{Z}_3$  i seguenti polinomi:

- (i)  $a(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 6x + 12$ ;
- (ii)  $b(x) = x^5 + 3x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x - 6$ ;
- (iii)  $c(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x - 4$ ;
- (iv)  $d(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x - 6$ ;
- (v)  $f(x) = x^4 - x^2 - 1$ ;
- (vi)  $g(x) = x^4 + 2x^2 + 4$ ;
- (vii)  $h(x) = x^4 + x^2 + 1$ .

**Esercizio 2.** Provare che il polinomio

$$f(x) = \frac{27}{4}x^{100} + \frac{18}{3}x^{62} - 9x^{17} + \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}[x]$$

è irriducibile su  $\mathbb{Q}$ . Stabilire se il polinomio  $g(x) = 12f(x) \in \mathbb{Z}[x]$  è irriducibile su  $\mathbb{Z}$ .

**Esercizio 3.** Fattorizzare su  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  il polinomio

$$f(x) = 4x^6 - \frac{2}{3}x^5 - \frac{26}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{32}{3}x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Q}[x].$$

**Esercizio 4.** Studiare al variare del parametro  $a \in \mathbb{Z}$  la riducibilità del polinomio

$$f(x) = 3x^3 + 20ax^2 + 50a^2x + 60 \in \mathbb{Z}[x]$$

su  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$ .

**Esercizio 5.** Fattorizzare su  $\mathbb{Z}_2$  e su  $\mathbb{Z}_3$  il polinomio  $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 1$ . Dedurre la fattorizzazione di  $f(x)$  su  $\mathbb{Q}$ .

**Esercizio 6.** Fattorizzare su  $\mathbb{Z}_2$  e su  $\mathbb{Z}_3$  il polinomio  $f(x) = x^5 + 7x^4 + 2x^3 + 6x^2 - x + 8$ . Dedurre la fattorizzazione di  $f(x)$  su  $\mathbb{Q}$ .

**Esercizio 7.** Sia  $a \in \mathbb{Z}$  privo di fattori quadratici. Provare che per ogni  $n \geq 1$  il polinomio  $x^n - a$  è irriducibile su  $\mathbb{Q}$ . Cosa si può dire invece di  $x^n + a$ ? E di  $x^n + a^n x^{n-3} + a$ , con  $n > 3$ ?

**Esercizio 8.** Provare che il polinomio  $f(x) = x^5 - x + 1$  è irriducibile su  $\mathbb{Q}$ .

**Esercizio 9.** Esibire un polinomio di grado 2 ed uno di grado 3 a coefficienti interi, riducibili su  $\mathbb{Z}$  e senza radici intere.