Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2013-2014
GE110 - Geometria 1 - Prova in itinere
25 Marzo 2014

Al candidato è richiesto di risolvere il maggior numero possibile di esercizi spiegando esaurientemente ogni risposta data. Non è consentito l'uso di calcolatrici, telefoni cellulari, libri di testo né appunti. Si ricorda che la prova ha carattere strettamente individuale.

Esercizio 1. Calcolare il rango e il determinante della seguente matrice a coefficienti reali:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & \pi \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Siano $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

Esercizio 3. Sia dato il seguente sistema lineare

$$S_\alpha : \begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + \alpha z = 0 \\ \alpha x + \alpha y + z = 0 \\ \alpha y = 0 \end{cases}$$

dove α è un parametro reale. Sia $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^3$ lo spazio vettoriale delle soluzioni di S_α.

(i) Discutere e risolvere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema S_α.

(ii) Determinare, quando esiste, una base di V_α.

(iii) Determinare un complemento diretto U per $V_0 + V_1$.

Esercizio 4. Si consideri il sottoinsieme W di $M_2(\mathbb{R})$ definito da

$$W = \{ X \in M_2(\mathbb{R}) \mid XA = AX \},$$

dove $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Provare che W è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

(ii) Determinare la dimensione ed una base di W.

(iii) Determinare un complemento diretto di W in $M_2(\mathbb{R})$.

(iv) Sia $V = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Determinare una base e la dimensione di $W + V$ e $W \cap V$. Stabilire se $W \oplus V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(v) Sia $\mathcal{Z}$ il centro di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ovvero l'insieme di tutte le matrici di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ che commutano per moltiplicazione con tutte le altre matrici di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Sapendo che $\mathcal{Z}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, determinare una base di $\mathcal{Z}$. Verificare che $\mathcal{Z}$ è sottospazio vettoriale di W e completare una base di $\mathcal{Z}$ ad una base di W.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4. Siano S e T due sottospazi vettoriali distinti di V, entrambi di dimensione 3. Provare che $\dim(S \cap T) = 2$.

Esercizio 6. Siano m, n, p numeri interi e sia $n \neq 0$. Dimostrare che la matrice $A = \begin{pmatrix} m & \sqrt{2} \\ n & p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ è invertibile.

Esercizio 7. Sia V uno spazio vettoriale reale. Siano dati i vettori $v_1,\ v_2,\ v_3 \in V$ linearmente indipendenti. Siano infine $w_1, w_2, w_3, w_4 \in V$ combinazioni lineari di $v_1,\ v_2$ e v_3. Giustificando esaurientemente la risposta, dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

(i) $\dim(V) \leqslant 3$.

(ii) w_1, w_2, w_3 e w_4 sono linearmente indipendenti.

(iii) w_1, w_2 e w_3 sono linearmente dipendenti.

(iv) $v_1 \notin \langle v_2,\ v_3 - 2v_2 \rangle$.

(v) $\langle v_1 + v_2,\ v_1 + v_3,\ v_2 + v_3 \rangle = \langle v_1,\ v_1 + v_2,\ v_1 + v_2 + v_3,\ w_4 \rangle$.

Esercizio 8. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Provare che la matrice A è invertibile.

(ii) Trovare una formula per il calcolo di A^n, dove $n \in \mathbb{Z}$, e la si dimostri.

(iii) Si spieghi perché la matrice $B = A - \frac{1}{2}\, {}^t(A - I_2)$ è invertibile e la si scriva come prodotto di matrici elementari.