

**Università di Roma *La Sapienza***  
**Facoltà di Ingegneria Civile ed Industriale**  
**A.A. 2013-2014 - Analisi Matematica II**  
**Esercizi di riepilogo sui numeri complessi**  
a cura di Antonio Cigliola

**Esercizio 1.** Portare in forma trigonometrica ed esponenziale i seguenti numeri complessi:

- (i)  $z = 0$ ;
- (ii)  $z = 1$ ;
- (iii)  $z = -\sqrt{2}$ ;
- (iv)  $z = i$ ;
- (v)  $z = 1 + i$ ;
- (vi)  $z = i(1 + i)$ ;
- (vii)  $z = \frac{1 + i}{1 - i}$ ;
- (viii)  $z = \frac{1}{3 + 3i}$ ;
- (ix)  $z = \sin \alpha + i \cos \alpha$ ;
- (x)  $z = \frac{4i}{\sqrt{3} + i}$ ;
- (xi)  $z = \frac{i(i - 1)}{(1 + i)^2}$ ;
- (xii)  $z = (1 + i)(2 - 2i)$ ;
- (xiii)  $z = \frac{2^8}{(-\sqrt{6} - i\sqrt{5})^2}$ ;
- (xiv)  $z = \frac{3}{\left(-1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^4}$ .

**Esercizio 2.** Rappresentare nel piano di Argand-Gauss i numeri complessi dell'esercizio precedente.

**Esercizio 3.** Calcolare il modulo  $\rho$  e l'argomento  $\vartheta$  dei seguenti numeri complessi:

- (i)  $1 + i - \frac{i}{1 - 2i}$ ;
- (ii)  $\frac{1}{1 - i} + \frac{2i}{i - 1}$ ;
- (iii)  $\frac{3 - i}{(1 + i)^2} - \frac{1}{1 - i}$ .

**Esercizio 4.** Calcolare  $z^2$ ,  $z^6$  e  $z^{22}$  per

(i)  $z = -i$ ;

(ii)  $z = 1 - i$ ;

(iii)  $z = \frac{1-i}{i}$ ;

(iv)  $z = \frac{1}{(1-i)^2} - i$ ;

(v)  $z = \frac{2}{\sqrt{3}-i} + \frac{1}{i}$ .

**Esercizio 5.** Verificare che  $1+i$  è radice del polinomio  $p(z) = z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4$ . Trovare le altre radici di  $p(z)$ .

**Esercizio 6.** Verificare che, se  $|z| = 1$ , si ha  $\left| \frac{3z-i}{3+iz} \right| = 1$

**Esercizio 7.** Si fornisca un esempio di una disequazione in  $\mathbb{C}$

(i) priva di significato.

(ii) che ha per soluzione un solo punto.

(iii) che ha per soluzione il cerchio di centro  $i$ , raggio  $e$  senza il suo bordo.

(iv) che ha per soluzione una regione compatta e limitata del piano.

(v) che ha per soluzione una regione aperta ed illimitata del piano che contenga il punto  $\cos 1 + i \sin 1$ .

**Esercizio 8.** Determinare, se esiste, un polinomio a coefficienti reali di grado 4 che ha per radici in  $\mathbb{C}$  i numeri  $1$ ,  $-1$ ,  $i$  e  $1+i$ .

**Esercizio 9.** Determinare, se esiste, un polinomio a coefficienti complessi di grado 4 che ha per radici in  $\mathbb{C}$  i numeri  $1$  e  $1-\pi$ .

**Esercizio 10.** Determinare, se esiste, un polinomio a coefficienti reali di grado 4 che ha per radici in  $\mathbb{R}$  i numeri  $1$  e  $1-\pi$ .

**Esercizio 11.** Risolvere le seguenti equazioni in  $\mathbb{C}$ :

(i)  $\frac{1-i}{i+2}z = \frac{2-i}{i}$ ;

(ii)  $(z+i)^2 = (\sqrt{3}+i)^3$ ;

(iii)  $z^4 - z^2 + 1 = 0$ ;

(iv)  $z^6 + z^3 + 1 = 0$ ;

(v)  $z^3 = |z|^2$ ;

(vi)  $z^2 + i\bar{z} = 1$ ;

(vii)  $z^2 + i\sqrt{5}|z| + 6 = 0$ ;

- (viii)  $|z|^2 + 5z + 10i = 0$ ;
- (ix)  $z^2 + i\sqrt{3}z + 6 = 0$ ;
- (x)  $|1 + z - 2i| = 5$ ;
- (xi)  $z^3 = \bar{z}^2$ ;
- (xii)  $z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ ;
- (xiii)  $z^6 + i\bar{z}^3 = 0$ ;
- (xiv)  $z^2 = \bar{z}^2$ ;
- (xv)  $z^4 + iz^3 + z^2 + iz = 0$ ;
- (xvi)  $(z^2 - 2i)^2 = (z^2 + 4z)^2$ ;
- (xvii)  $(2z + 3)^3 = -27i$ ;
- (xviii)  $z^2 + 2iz - 3 + 2\sqrt{3}i = 0$ ;
- (xix)  $z^3 = (i - 2)^3$ ;
- (xx)  $|z| = i - 4z$ ;
- (xxi)  $(2z - 1)^2(2z + 1) = 4z(2z - 1)$ ;
- (xxii)  $2|z| + 1 = 0$ .

**Esercizio 12.** Siano  $C_1$  la circonferenza di raggio 2 e centro l'origine,  $C_2$  la circonferenza di centro  $i$  e raggio  $e$  ed infine  $r$  l'asse reale del piano complesso. Determinare un'equazione in  $\mathbb{C}$  che abbia come insieme delle soluzioni l'insieme:

$$\{i, -1\} \cup C_1 \cup C_2 \cup r.$$

**Esercizio 13.** Rappresentare graficamente l'insieme:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - i| = |\Im(z - i)|\}.$$

**Esercizio 14.** Risolvere le seguenti disequazioni in  $\mathbb{C}$  e rappresentare graficamente l'insieme delle soluzioni trovate:

- (i)  $|z - i| < |z + i|$ ;
- (ii)  $|z| > 2$ ;
- (iii)  $|z + i\pi| < 3$ ;
- (iv)  $|z - i|^2 + |z + i|^2 < 2$ .

**Esercizio 15.** Per ciascuna delle seguenti funzioni complesse di variabile complessa si determinino e si rappresentino graficamente il dominio e l'insieme immagine; si stabilisca inoltre se sono funzioni iniettive, surgettive o biunivoche:

- (i)  $f(z) = z + 1$ ;
- (ii)  $f(z) = z + w$ , con  $w \in \mathbb{C}$  fissato (traslazione secondo  $w$ );

- (iii)  $f(z) = z^3$ ;
- (iv)  $f(z) = zw$ , con  $w \in \mathbb{C}$  fissato tale che  $|w| = 1$  (rotazione secondo  $w$ );
- (v)  $f(z) = \bar{z}$ ;
- (vi)  $f(z) = zw$ , con  $w \in \mathbb{C}$  fissato (rotazione secondo il versore di  $w$  e dilatazione secondo  $|w|$ );
- (vii)  $f(z) = \frac{z}{|z|}$ ;
- (viii)  $f(z) = |z|$  (funzione modulo);
- (ix)  $f(z) = |z| - 2$ ;
- (x)  $f(z) = |z - 2|$ ;
- (xi)  $f(z) = \Re(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{z + \bar{z}}{2}$  (parte reale);
- (xii)  $f(z) = \Im(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{z - \bar{z}}{2i}$  (parte immaginaria);
- (xiii)  $f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}}{|z|^2} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0. \end{cases}$

**Esercizio 16.** Calcolare  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{1005}$ .

**Esercizio 17.** Determinare e rappresentare graficamente le radici quadrate, terze, quarte, quinte, seste e ottave di 1 in  $\mathbb{C}$ .

**Esercizio 18.** Determinare le radici quadrate, terze, quarte, quinte, seste e ottave di  $-3$  in  $\mathbb{C}$ .

**Esercizio 19.** Determinare le radici quadrate, terze, quarte, quinte, seste e ottave di  $i$  in  $\mathbb{C}$ .

**Esercizio 20.** Determinare le radici quadrate, terze, quarte, quinte, seste e ottave di  $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$  in  $\mathbb{C}$ .

**Esercizio 21.** Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di tutti i numeri complessi il cui quadrato è un numero reale.