

Università di Roma *La Sapienza*
Facoltà di Ingegneria Civile ed Industriale
A.A. 2013-2014 - Analisi Matematica II
Esercizi di riepilogo su integrali doppi
a cura di Antonio Cigliola

Esercizio 1. Sia dato l'insieme

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 4 \}.$$

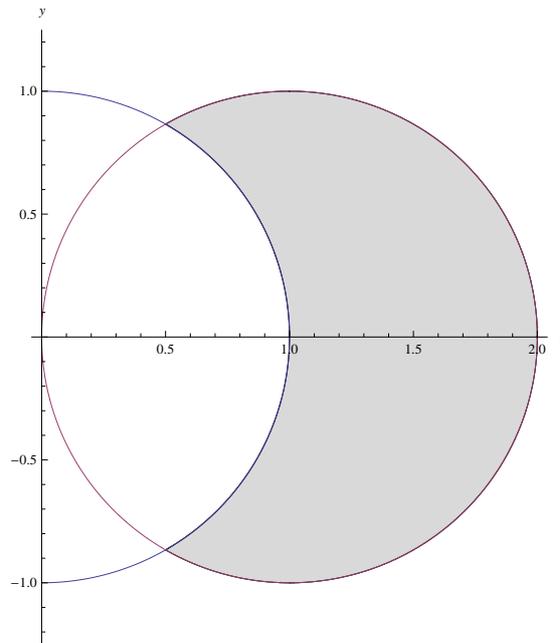
- (i) Scrivere l'insieme D come dominio normale in x e come normale in y .
- (ii) Descrivere l'insieme D in coordinate polari e rappresentarlo graficamente sia nel piano cartesiano che nel piano polare.
- (iii) Determinare il baricentro di D .
- (iv) Calcolare $\iint_D x e^y dx dy$. [Ris. $1 + \frac{3}{e^2}$].
- (v) Verificare che $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{e^4}\right)$.
- (vi) Calcolare $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$ [Ris. $\pi(e^2 - 1)$].
- (vii) Verificare che $\iint_D \frac{x \sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \sin 2 - 2$.
- (viii) Calcolare $\iint_D \log(\sqrt{x^2+y^2} + 1) dx dy$ [Ris. $\frac{3}{4}\pi \log 3$].

Esercizio 2. Sia T il triangolo di vertici i punti $(0,0)$, $(1,1)$ e $(-1,1)$. Calcolare i seguenti integrali:

- (i) $\iint_T xy dx dy$ [Ris. 0].
- (ii) $\iint_T x^2 y dx dy$ [Ris. $\frac{2}{15}$].
- (iii) $\iint_T \sin y dx dy$ [Ris. $2(\sin 1 - \cos 1)$].
- (iv) $\iint_T y e^x dx dy$ [Ris. $2e^{-1}$].
- (v) $\iint_T \frac{1+y}{1+x^2} dx dy$ [Ris. $\pi - \log 2 - 1$].

Si calcolino inoltre area e baricentro di T usando gli integrali doppi e si verifichino i risultati trovati usando metodi geometrici più elementari.

Esercizio 3. In figura sono date le circonferenze di centro $(0,0)$ e $(1,0)$ entrambe di raggio 1.



Sia D la regione colorata in figura.

(i) Calcolare l'area di D [Ris. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$].

(ii) Determinare il baricentro di D .

(iii) Calcolare l'integrale $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ [Ris. $2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$].

(iv) Calcolare l'integrale $\iint_D (x^2 + y^2 + 2) dx dy$.