Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica
GE210-Geometria 2 – A.A. 2014-2015
Seconda prova in itinere

Esercizio 1. Sia data una proiettività f del piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Dimostrare che se P_1 e P_2 sono due punti distinti fissati da f, allora f fissa anche la retta r passante per P_1 e P_2. Tale retta r è necessariamente fissata punto per punto? Sotto quale condizione aggiuntiva la retta r è fissata punto per punto?

Esercizio 2. Tra le trasformazioni del piano, si considerino la simmetria σ rispetto alla retta $r: \ x - 2y + 1 = 0$, la rotazione ρ attorno all'origine di 90° e la traslazione τ di vettore $\vec{v} = (-1, 1)$.

(a) Trovare le equazioni di ρ, σ e τ.

(b) Trovare le equazioni della trasformazione $f := \rho \circ \tau \circ \sigma$.

(c) Trovare i punti e le rette fissate da f.

(d) Provare che f è una isometria e determinarne il tipo.

(e) Sono dati i punti A, B e C nel piano di cui si sa che

$$f(A) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{2}\right), \qquad f(B) = \left(\frac{6}{5}, \frac{1}{2}\right), \qquad f(C) = \left(\frac{11}{5}, \frac{5}{2}\right).$$

Calcolare l'area del triangolo $\triangle(ABC)$.

Esercizio 3. Sia dato in $\mathbb{R}^3$ il vettore $v = (1, -1, -2)$. Si consideri l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che ad ogni $u \in \mathbb{R}^3$ associa $F(u) = u \wedge v$.

(a) Dimostrare che F è un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ e stabilire se è simmetrico.

(b) Dire se F è un automorfismo di $\mathbb{R}^3$.

(c) Provare che $\mathrm{Ker}F$ ed $\mathrm{Im}F$ sono sottospazi tra loro ortogonali.

(d) Trovare autovalori e autospazi di F e stabilire se esso è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Siano dati nello spazio euclideo i punti

$$A(1, 0, 1) \qquad B(0, 1, -1) \qquad C(-1, 0, 0).$$

(a) Verificare che i punti A, B e C non sono allineati e calcolare l'area del triangolo $\triangle(ABC)$.

(b) Determinare il piano π passante per i punti A, B e C.

(c) Trovare la retta r passante per A e B.

(d) Trovare la retta s perpendicolare a π passante per il punto $P(0,-3,0)$.

(e) Verificare che r ed s sono sghembe, determinare la perpendicolare comune e calcolare la loro distanza.

Esercizio 5. Siano dati nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ l'origine O e le rette

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s: \begin{cases} x = 0 \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

Siano poi $\overline{O}$, $\overline{r}$ ed $\overline{s}$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ rispettivamente le chiusure proiettive di O, r ed s rispetto ad X_0.

(a) Trovare in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ una retta passante per O e complanare con r ed s.

(b) Verificare che $\overline{r}$ ed $\overline{s}$ sono sghembe.

(c) Trovare in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ una retta passante per $\overline{O}$ e incidente $\overline{r}$ ed $\overline{s}$.

Esercizio 6. Sia data nel piano euclideo la conica

$$\mathscr{C}:\ 10x^2 - 20xy - 5y^2 - 12x + 6y - 6 = 0.$$

(a) Classificare la conica $\mathscr{C}$ e trovare la sua equazione canonica.

(b) Detta $\mathscr{C}_0$ la chiusura proiettiva di $\mathscr{C}$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ rispetto ad X_0, si determini, se esiste, una proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che trasforma $\mathscr{C}_0$ nella conica

$$\mathscr{D}:\ X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + 2X_0X_1 = 0.$$