Tutorato di GE210

Tutori: Sabrina Capaldi & Andrea Lelli

Universitá degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato 1 - 8 Ottobre 2014

1. Diagonalizzare la forma bilineare associata alle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 4 & 4 & 7 & 12 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Sia F: $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ forma bilineare definita da:
   $\mathrm{F}(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_3 + x_1y_4 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + x_4y_1 + x_4y_4$

   - Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$
   - Verificare che F è degenere e individuare un vettore non nullo $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^4 : F(\bar{x}_0, \bar{y}) = 0 \quad \forall \bar{y} \in \mathbb{R}^4$

3. Sia V=$\langle \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4, \bar{v}_5 \rangle$, $\bar{v}_i \in \mathbb{R}^5$, $\langle \; , \; \rangle$ prodotto scalare standard

   $\bar{v}_1 = (1, 0, 0, 0, 0) \qquad \bar{v}_2 = (1, 2, 1, 1, 1) \qquad \bar{v}_3 = (2, 3, 1, 0, 1)$
   $\bar{v}_4 = (3, 1, 0, -1, 0) \qquad \bar{v}_5 = (1, 1, 1, 0, 0)$

   - Calcolare la dim di V.
   - Trovare una base ortogonale di V con Gram-Schmidt.

4. Sia A la matrice associata alla forma bilineare F:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{v} = (3, 5, 2, -1)$$

   Calcolare $\bar{v}^{\perp}$ rispetto ad F.

5. In ciascuno dei seguenti casi determinare una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori assegnati:

- $(1,0,0,1)$; $(0,1,2,3)$; $(1,-1,1,-1)$
- $(-1,0,1,2)$; $(2,0,1,-4)$; $(0,0,3,0)$; $(-3,0,0,6)$
- $\{(1,k,k^2,k^3) \mid k \in \mathbb{N}\}$

6. Si consideri la forma bilineare b in $\mathbb{R}^4$ cosí definita $\forall\ \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^4$:
   $\mathrm{b}(\bar{x}, \bar{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_3y_1 + 3x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3 + 2x_4y_4$
   - Verificare che b è un prodotto scalare.
   - Trovare una base ortogonale e una base ortonormale per b.
   - Trovare una base ortonormale del sottospazio V di $\mathbb{R}^4$:
     V$=\{(x,y,z,w) \mid 2x+y-z-w=0\}$

7. Sia $\{(2,1),(1,1)\}$ base di $\mathbb{R}^2$ dotato del prodotto scalare standard
   - Trovare una base ortonormale.
   - Sia $\mathcal{E} = \{(1,0),(0,1)\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$.
     Trovare la matrice P del cambiamento di base.
   - Verifica che P è ortogonale.

8. Siano A e B le matrici associate a due forme bilineari rispetto alla base canonica:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Trovare per ciascuna una base diagonalizzante e le matrici associate rispetto alle basi trovate.

9. Si consideri la forma bilineare simmetrica b: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la cui forma quadratica associata q: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è:

   $\mathrm{q}(\bar{v}) = 5x^2 + 2xy - 2xz + y^2 + 4yz + 4z^2$
   - Si determini una base diagonalizzante B; rango e segnatura di b.
   - Sia i: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica che, rispetto alla base B, ha come matrice associata la matrice identitá.
     Si determinino i valori di t per i quali:
     b+ti: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è definita positiva.