Tutorato di GE210

Tutori: Sabrina Capaldi & Andrea Lelli

Universitá degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato 5 - 11 Novembre 2014

1. Dimostrare l'Identitá di Lagrange:
   Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3, con prodotto scalare $\langle , \rangle$.
   $\forall \ v, \ w, \ a, \ b \ \in V$ si ha che:
   $$\langle v \wedge w, a \wedge b \rangle = \left| \begin{pmatrix} \langle v, a \rangle & \langle v, b \rangle \\ \langle w, a \rangle & \langle w, b \rangle \end{pmatrix} \right|$$
   Verificare l'Identitá di Lagrange per le seguenti quaterne di vettori:
   - $v = (1, 0, 0) \qquad w = (1, 2, 1) \qquad a = (2, 3, 3) \qquad b = (0, 0, 1)$
   - $v = (1, 1, 0) \qquad w = (2, 1, 1) \qquad a = (6, 1, 1) \qquad b = (1, 0, 1)$
2. Dimostrare che $\forall \ v_1, \ v_2, \ v_3 \ \in V$ e $\forall \ c \in \mathbb{R}$ si ha che:
   (a) $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$
   (b) $v_1 \wedge (v_2 + v_3) = v_1 \wedge v_2 + v_1 \wedge v_3$
   (c) $c\,(v_1 \wedge v_2) = (cv_1) \wedge v_2 = v_1 \wedge (cv_2)$
   (d) $\|v_1 \wedge v_2\|^2 = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2$
   (e) $v_1 \wedge v_2 = 0 \Leftrightarrow v_1$ e v_2 sono paralleli.
3. Dati 3 punti $(x_A, y_A), \ (x_B, y_B), \ (x_C, y_C) \in \mathbb{R}^2$,
   dimostrare la formula per calcolare l'area del triangolo:
   $$A = \frac{1}{2} \left| det \begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & x_C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| x_A(y_B - y_C) - x_B(y_A - y_C) - x_C(y_A - y_B) \right|$$
   Calcolare l'area del triangolo dato dai punti:
   - $(1, 2) \qquad (0, 3) \qquad (4, 1)$
   - $(1, 0) \qquad (0, 1) \qquad (16, 16)$
4. Verificare se le seguenti sono terne di punti allineati:
   - $(0, 9) \qquad (2, 1) \qquad (7, 3)$
   - $(1, 2) \qquad (2, 5) \qquad (4, 11)$
   - $(1, 5) \qquad (2, 3) \qquad (3, 0)$

- $(1,2) \qquad (2,5) \qquad (1+\pi, 2+3\pi)$

5. Calcolare la distanza del punto P dalla retta r in $\mathbb{R}^2$:

   - P$= (1,-3) \qquad r: 2X - Y + 1 = 0$
   - P$= (1,4) \qquad r: 4X - 3Y + 2 = 0$

6. Calcolare la distanza tra 2 rette parallele:

   - $r: X + 7Y + 1 = 0 \qquad s: 2X + 14Y + 7 = 0$
   - $r: 8X - Y + 4 = 0 \qquad s: 4X - \frac{1}{2}Y + 12 = 0$

7. Calcolare l'angolo convesso formato dall'intersezione delle seguenti coppie di rette:

   - $r: 2X - Y + 1 = 0 \qquad s: 4X - 3Y + 7 = 0$
   - $r: 2X + 2Y + 1 = 0 \qquad s: 4X - 5Y + 1 = 0$
   - $r: 2X + 4Y + 1 = 0 \qquad s: 4X - 2Y + 3 = 0$

   Cosa succede se cambio il segno a uno dei due o entrambi i versori?

8. Dati $v,\ w \in \mathbb{R}^3$, calcolare una base ortonormale, rispetto al prodotto scalare standard, di $\mathbb{R}^3$ sfruttando l'operazione di prodotto vettoriale.

   - $v = (0,1,3); \qquad w = (5,4,1)$
   - $v = (1,1,1); \qquad w = (2,2,1)$
   - $v = (-\frac{3}{2},1,1); \qquad w = (-3,2,-2)$
   - $v = (-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}); \qquad w = (0,0,1)$