Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2015-2016 - Docente: Prof. A. Verra

Tutori: Francesco Di Tullio e Manuela Donati

Tutorato 1 - 1 Ottobre 2015

1. Per ciscuna delle funzioni $b : V \times V \to K$, dove K é campo e V un K-spazio vettoriale, stabilire se si tratta di una forma bilineare e, nel caso lo sia, stabilire se é simmetrica.

   V= $\mathbb{R}^3$; K= $\mathbb{R}$

   - b(x,y)=x_1y_1+$2x_2y_2$+x_3y_3+x_1y_2
   - b(x,y)=$5x_3y_2$+$(x_2 + y_3)^2$ - ${x_2}^2$ - ${y_3}^2$
   - b(x,y)=x_1y_1+$2x_2y_2$+$2x_1y_2$+$2x_2y_1$+$3x_3y_3$

   V= $\mathbb{R}^n$; K= $\mathbb{R}$

   - b(x,y)=$\sum_{i=0}^{n} x_i|y_i|$
   - b(x,y)=$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} y_i\right)$
   - b(x,y)=$\sum_{i=0}^{n}(x_i + y_i)^2$ - $\sum_{i=0}^{n} {x_i}^2$ - $\sum_{i=0}^{n} {y_i}^2$

   V= $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; K= $\mathbb{R}$

   - b(x,y)= det$(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})$

   V= $(\mathcal{C}[0,1])$; K= $\mathbb{R}$

   - b(x,y)= $\int_0^1 g(x)h(x)dx$

2. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando le risposte:

   - In una forma bilineare degenere si puó sempre trovare un vettore isotropo non nullo.
   - Una forma bilineare non degenere non ha mai vettori isotropi non nulli.
   - L'insieme dei vettori isotropi rispetto ad una forma bilineare costituisce un sottospazio vettoriale.

- La scrittura v=v'+v" Ã¨ unica. $v, w, v', v'' \in V$ con w non isotropo e $v' \parallel w$ e $v'' \perp w$

3. Sia $Q(x) = -2{x_2}^2$ l'espressione rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ di una forma quadratica
   - Scrivere la matrice A della forma bilineare simmetrica polare b associata a q
   - Verificare che b é degenere e determinare un vettore non nullo $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ortogonale ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^2$
   - Determinare l'insieme dei vettori isotropi di b

4. Data la forma bilineare $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_3y_3$$

   per ogni $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{x}$=(x_1, x_2, x_3) e $\mathbf{y}$=(y_1, y_2, y_3).
   - Stabilire se F é simmetrica.
   - Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica $\{e_1,e_2,e_3\}$.
   - Stabilire se F é degenere.
   - Verificare che i sottospazi $\langle(1, 0, 0)\rangle$ e $\langle(0, 0, 1)\rangle$ sono ortogonali rispetto alla forma F.
     (Nota: due sottospazi U e V si dicono ortogonali se $U \subseteq V^\perp$ e $V \subseteq U^\perp$)
   - Dimostrare che non esistono vettori isotropi del tipo $(0, 0, t)$ con $t \neq 0$.
   - Trova l'equazione del cono isotropo.