Note sugli esercizi di analisi uno del Politecnico di Torino

19 dicembre 2016

Successioni

Esercizio 1n. Calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$. Osserviamo che per $n > 2$ abbiamo

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$$

Questo ci permette di concludere che il limite della successione in questione è 0.

Continuità e derivabilità

- Esercizio 3d - Errata Corrige. Si ha che

$$\frac{d}{dx}\cos((x^2+x)^5) = -\sin((x^2+x))^5 5(x^2+x)^4(2x+1)$$

- Esercizio 6a Sia $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$. Si verifica che f si estende per continuità in 0 ponendo $f(0) = 0$. Calcoliamo la derivata prima in zero. Fuori da 0, abbiamo che $f'(x) = \frac{1}{x^3}\exp(-\frac{1}{x^2})$; calcoliamo la derivata destra in zero:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3}\exp(-\frac{1}{x^2}) = \lim_{t\to+\infty} t^{\frac{3}{2}}\exp(-t) = 0$$

  dove abbiamo posto $t = x^{-2}$ e $x = t^{-\frac{1}{2}}$. Similmente per la derivata sinistra abbiamo

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3}\exp(-\frac{1}{x^2}) = \lim_{t\to+\infty} -t^{\frac{3}{2}}\exp(-t) = 0$$

  dove abbiamo posto $t = x^{-2}$ e $x = -t^{-\frac{1}{2}}$ (si faccia attenzione al segno: in questo secondo caso x è negativa, quindi dobbiamo prendere meno la radice quadrata di t per invertire il cambio di variabile).

  Siccome la derivata destra e la derivata sinistra coincidono, concludiamo che f è derivabile in zero e $f'(0) = 0$.

- Esercizio 6b - Errata Corrige. Sia

$$f(x) = \frac{\arctan(x^4 - x^2)}{x}.$$

  Si verifica che f può essere estesa per continuità in 0 ponendo $f(0) = 0$. Calcoliamo la derivata in 0.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\arctan(h^4 + h^2)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\arctan(h^4 - h^2)}{h^4 - h^2}\right)\left(\frac{h^4 - h^2}{h^2}\right)$$

Abbiamo diviso e moltiplicato per $h^4 - h^2$: possiamo farlo perché $h \neq 0$. Il primo fattore è un limite notevole e tende ad 1. Il secondo fattore tende a -1, concludiamo che

$$f'(0) = -1$$

L'esercizio può equivalentemente essere risolto notando che il comportamento asintotico di $\arctan(h^4 - h^2)$ per h che tende a 0 è uguale a quello di $-h^2$.

- Esercizio 7b. Studiare il numero di soluzioni dell'equazione $e^x = kx^2$ al variare di $k > 0$ e $x \in \mathbb{R}$.

  Sia $F_k(x) = e^x - kx^2$, l'esercizio è equivalente a cercare il numero degli zeri di F_k al variare di k.

  Facciamo alcune osservazioni preliminari (facili, ma non completamente necessarie).

  Siccome $F_k(0) = 1 > 0$, $\lim_{x\to-\infty} F_k(x) = -\infty$, e F_k è continua, per il teorema dei valori intermedi esiste almeno una soluzione negativa.

  La derivata terza di F_k non si annulla mai, quindi per il teorema di Rolle la funzione F_k ha al più tre zeri.

  Adesso spieghiamo per sommi capi un argomento più complesso che permette di risolvere completamente l'esercizio.

  Studiando la derivata seconda $F_k''(x)$, si vede che la derivata prima $F_k'(x)$ ha un minimo assoluto e se ne calcola esplicitamente il valore.

  Si vede che per $k \leq \frac{e}{2}$, la derivata prima $F'(x)$ è sempre positiva, quindi $F_k(x)$ è sempre crescente e perciò ha un solo zero.

  Concentriamoci su $k > \frac{e}{2}$. In questo caso si vede che la derivata prima $F'(x)$ ha due zeri, $0 < x_1(k) < x_2(k)$. I valori $x_1(k)$ e $x_2(k)$ non si possono calcolare esplicitamente. Si vede che $x_1(k)$ è un massimo relativo per $F_k(x)$ e $F_k(x_1(k))$ è positivo. Invece $x_2(k)$ è un minimo relativo e si hanno tre possibilità

  1. $F_k(x_2(k)) < 0$, la funzione F ha tre zeri, uno negativo, uno compreso tra 0 e $x_2(k)$ e uno maggiore di $x_2(k)$
  2. $F_k(x_2(k)) = 0$, la funzione F ha due zeri, uno negativo, e uno a $x_2(k)$
  3. $F_k(x_2(k)) > 0$, la funzione F ha un solo zero, ed è negativo

Per capire quando siamo nel caso numero due, dobbiamo risolvere il sistema $F_k(x) = F_k'(x) = 0$. La soluzione è $k = \frac{e^2}{4}$ e $x = 2$; ne deduciamo che siamo nel caso 2 se e solo se $k = \frac{e^2}{4}$, in questo caso $x_2 = 2$.

Per studiare gli altri valori di k facciamo due osservazioni chiave. La prima, è che siamo nel primo caso se e solo se esiste un numer $\bar{x}$ tale che $F_k(\bar{x})$ è strettamente negativo (osserviamo che $\bar{x}$ non deve necessariamente essere $x_2(k)$). La seconda osservazione è che, se fissiamo x, il valore $F_k(x)$ è decrescente in k.

Siamo pronti a concludere l'esercizio. Per $k > \frac{e^2}{4}$, abbiamo che $F_k(2) < F_{\frac{e^2}{4}}(2) = 0$, perciò siamo nel caso numero uno. Per $\frac{e}{2} < k < \frac{e^2}{4}$, ragioniamo per assurdo. Se fossimo nel caso numero uno, allora esisterebbe $\bar{x}$ tale che $F_k(\bar{x}) < 0$; scegliendo $k = \frac{e^2}{4}$, avremmo che $F_{\frac{e^2}{4}}(\bar{x}) < 0$, perciò anche $k = \frac{e^2}{4}$ rientrebbe nel caso numero uno: una contraddizione, perché $k = \frac{e^2}{4}$ rientra nel caso numero due! Concludiamo che $\frac{e}{2} < k < \frac{e^2}{4}$ corrisponde al caso numero tre.

Una funzione integrale

Studiare la funzione

$$G(x) = \int_0^x t^4 e^{-t^2} dt$$

Il dominio di G è $\mathbb{R}$. La funzione è dispari, quindi possiamo limitarci a studiare la funzione nel dominio $x \geq 0$. Inoltre osserviamo che $G(0) = 0$.

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo che

$$G'(x) = x^4 e^{-x^2}$$

Concludiamo che $G(x)$ è sempre crescente e positiva per $x > 0$. Studiando la derivata seconda, si dimostra che la concavità è verso l'alto per $x \in (0, \sqrt{2})$ e verso il basso per $x \in (\sqrt{2}, +\infty)$. In $x = \sqrt{2}$ abbiamo un flesso.

Come mostreremo nel seguente esercizio, la funzione ha un asintoto orizzontale. Il valore di questo asintoto è $\int_0^{+\infty} t^4 e^{-t^2} dt$, ma non siamo in grado di calcolarlo esplicitamente.

Un integrale improprio

Dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} t^4 e^{-t^2} dt$$

è convergente, ovvero è uguale a un numero reale.

La funzione $G(x) = \int_0^x t^4 e^{-t^2} dt$ è crescente in x, quindi $\lim_{x\to\infty} G(x)$ esiste; dobbiamo far vedere che non vale $+\infty$.

Osserviamo che esiste un numero positivo M tale che

$$t^4 e^{-t^2} \leq t^{-3} \qquad \forall t \geq M$$

Per dimostrare questa osservazione si verifica che $\lim_{t\to\infty} t^7 e^{-t^2} = 0$ e poi si scrive la definizione di limite prendendo come ϵ un qualunque numero strettamente minore di 1.

Siccome $t^4 e^{-t^2}$ è sempre positiva, abbiamo che

$$\int_0^{+\infty} t^4 e^{-t^2} dt = \int_0^M t^4 e^{-t^2} dt + \int_M^{+\infty} t^4 e^{-t^2} dt \leq \int_M^{+\infty} t^4 e^{-t^2} dt \leq \int_M^{+\infty} t^{-3} dt = \frac{1}{2} M^{-2}$$

Questo conclude l'esercizio

Due commenti. Il calcolo non è effettivo, ovvero non abbiamo nessuna stima sul numero $\int_0^{+\infty} t^4 e^{-t^2} dt$. Il ruolo svolto da t^{-3} potrebbe essere svolto da molte altre funzioni, ad esempio t^{-2}, t^{-7} oppure $t^4 e^{-t}$.