UN'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DI ALCUNE FORMULE NOTEVOLI

GIULIO CODOGNI

In questa nota discuteremo tre funzioni notevoli: la funzione seno, la funzione $\wp$ di Weierstrass e la funzione θ di Riemann. Queste funzioni possono essere facilmente introdotte come serie di potenze e le formule che le coinvolgono possono essere dimostrate attraverso una laboriosa ma elementare manipolazione delle suddette serie.

Il nostro obiettivo è mettere in luce come queste formule riflettano alcune costruzioni geometriche a volte molte sofisticate. Le idee chiave si possono già vedere durante discussione della funzione seno. Non avanzeremo nessuna pretesa di rigorosità o completezza.

1. La funzione seno

La funzione trigonometrica seno è una funzione analitica reale, ovvero può essere descritta attraverso il suo sviluppo in serie di potenze:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \, ;$$

in questa formula x rappresenta un numero reale qualunque. Vorremmo sottolineare da subito che in questa espressione appaiono infiniti termini.

La funzione seno è periodica e il suo periodo è 2π; in simboli

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \, .$$

Questa periodicità può essere interpretata pensando al seno come un funzione definita sul cerchio di circonferenza 2π piuttosto che sulla retta reale. In altri termini, possiamo pensare che la variabile x, invece di variare su una retta, varia su un cerchio.

Il cerchio, che denoteremo con S^1, può essere costruito come il quoziente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. In parole povere, si prende la retta reale e si identificano due numeri quando differiscono per un multiplo intero di 2π: stiamo avvolgendo la retta su stessa come fosse una spirale. Da questo punto di vista, il periodo è l'integrale della forma differenziale dx su S^1, in simboli:

$$2\pi = \int_{S^1} dx \, .$$

Le funzioni trigonometriche soddisfano numerose identità notevoli, come le formule di prostaferesi e di addizione, nonché numerose equazioni differenziali. Qui ci accontenteremo di guardare alla più semplice:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \, ,$$

Queste nota è un estratto del Colloquio "Forme modulari, periodi e superfici di Riemann" che ho tenuto presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bari nel giugno del 2017. Ringrazio Francesco Bastianelli e Donatella Iacono per l'invito.

che può anche essere pensata come l'equazione differenziale:

$$\sin^2(x) + \left(\frac{d\sin}{dx}(x)\right)^2 = 1\,.$$

L'interpretazione geometrica di questa formula è notevolissima. Possiamo definire un'immersione ι del cerchio S^1 nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{rccc} \iota\colon & S^1 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (\sin(x), \cos(x)) \end{array}$$

e l'identità precedente ci dice che ι identifica il cerchio S^1 con le soluzioni dell'equazione polinomiale

$$x^2 + y^2 = 1\,.$$

Questo fatto, per quanto elementare, è sorprendente: il seno è una funzione analitica che coinvolge infiniti termini, tuttavia è intimamente legata a delle equazioni polinomiali che coinvolgono solo un numero finito di termini. In un certo senso, questo è un antenato del cosiddetto Lemma di Chow che, sotto opportune ipotesi, mette in relazione la geometria analitica e la geometria algebrica.

Prima di terminare la discussione delle funzioni trigonometriche, vorremmo introdurre una notazione che in questo contesto è leggermente ridondante, ma può essere utile per capire gli esempi successivi. Definiamo il seno come una funzione di due variabili x e P:

$$\sin(x; P) = \sin\left(\frac{2\pi x}{P}\right)$$

Quando P è un numero reale positivo fissato, $\sin(x; P)$ è una funzione di x con periodo P; per tornare al punto di vista precedente, $\sin(x; P)$ è una funzione sul cerchio S^1_P di circonferenza P.

Adesso fissiamo P e guardiamo all'immersione ι_P definita come

$$\begin{array}{rccc} \iota_P\colon & S^1_P & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (\sin(x; P), \cos(x; P)) \end{array}$$

dove $\cos(x; P) = \cos(2\pi x/P)$. L'immersione ι_P identifica il cerchio S^1_P con le soluzioni dell'equazione $x^2 + y^2 = 1$; è importante osservare che questa equazione non dipende da P. Ne concludiamo che, seppure dal punto di vista metrico il cerchio S^1_P cambia al variare di P, dal punto di vista algebrico, ovvero dal punto di vista delle equazioni polinomiali, il cerchio S^1_P non dipende da P.

2. La funzione $\wp$ di Weierstrass

La prossima funzione è definita sui numeri complessi invece che sui numeri reali. Richiamiamo brevemente alcune definizioni di base sui numeri complessi.

Il piano dei numeri complessi si indica con $\mathbb{C}$, denoteremo con z un numero complesso qualunque in $\mathbb{C}$. Ogni numero complesso z is scrive come $a + ib$, dove i è la radice quadrata di -1 ed a e b sono numeri reali. Possiamo pensare ad a e b come coordinate cartesiane per il piano.

Il semipiano superiore $\mathcal{H}$ è il sottoinsieme dei numeri complessi che hanno la parte immaginaria (ovvero b, nelle notazioni del paragrafo precedente) strettamente positiva. Solitamente, gli elementi di $\mathcal{H}$ si indicano con τ.

La funzione di $\wp$ di Weierstrass è una funzione di due variabili: z, che varia in $\mathbb{C}$ e τ, che varia in $\mathcal{H}$; questa è la sua definizione:

$$\wp(z; \tau) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,0)} \frac{1}{(z + m + n\tau)^2} - \frac{1}{(m + n\tau)^2}\,.$$

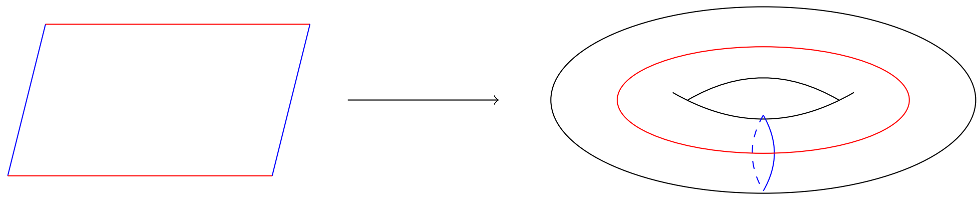
Per alcuni valori speciali di z, i denominatori che appaino nella definizione della funzione $\wp$ si annullano; colpevolmente, ignoreremo questo problema.

La funzione $\wp$, così come la funzione seno, è periodica, ma ha due periodi invece che uno solo. La periodicità è espressa da queste due formule:

$$\wp(z+1;\tau) = \wp(z,\tau) \qquad \wp(z+\tau;\tau) = \wp(z;\tau)\,.$$

A parole, possiamo dire che, fissato τ, $\wp$ è una funzione di z con periodi 1 e τ.

Vogliamo interpretare queste periodicità dicendo che, per τ fissato, $\wp$ non è una funzione definita sul piano complesso bensì su un oggetto geometrico che generalizza il cerchio S^1. Quest'oggetto è la curva ellittica E_τ definita come il quoziente $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z})$. Più precisamente, E_τ è ottenuta prendendo tutti i numeri complessi e identificando due numeri se differiscono per un intero o per un multiplo intero di τ. Il disegno ci porta naturalmente a visualizzare E_τ come la classica ciambella:



A sinistra abbiamo diesgnato un parallelogramma nel piano complesso $\mathbb{C}$; i suoi lati sono i segmenti $[0,1]$, $[\tau,1+\tau]$ (disegnati in rosso), $[0,\tau]$ e $[1,1+\tau]$ (disegnati in blu). L'identificazione descritta sopra incolla i segmenti rossi e quelli blu, ottenendo così la curva ellittica a destra.

Sulla curva ellittica abbiamo inoltre due curve naturali: l'immagine del segmento $[0,1]$ che denotiamo con A (in rosso sulla curva ellittica) e l'immagine del segmento $[0,\tau]$ che denotiamo con B (in blu sulla curva ellittica). Sulla curva ellittica abbiamo inoltre una forma differenziale naturale $\omega := dz$. Anche qui ritroviamo i periodi come integrali

$$\int_A \omega = 1 \quad \text{e} \quad \int_B \omega = \tau\,.$$

Anche la funzione $\wp$ di Weierstrass soddisfa molte identità notevoli. Ci limiteremo alla seguente equazione differenziale

$$\wp'(z;\tau)^2 = 4\wp(z;\tau)^3 - g_2(\tau)\wp(z;\tau) - g_3(\tau)$$

dove $\wp'(z;\tau)$ è la derivata di $\wp$ rispetto a z, g_2 e g_3 sono funzioni notevoli di τ che non discuteremo in questa nota. Vogliamo interpretare quest'equazione in maniera geometrica. Guardiamo all'immersione

$$\begin{array}{rccc} \iota_\tau : & E_\tau & \dashrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & z & \mapsto & (\wp(z;\tau), \wp'(z,\tau)) \end{array}$$

(La freccia è tratteggiata per ricordarci che abbiamo ignorato i punti in cui i denominatori nella definizione di $\wp$ si annullano). Similmente a quanto accadeva con le funzioni trigonometriche, l'equazione differenziale discussa sopra ci dice che ι_P identifica la curva ellittica E_τ con il luogo delle soluzioni dell'equazione polinomiale

$$y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)\,.$$

Di nuovo la stessa sorpresa: grazie ad un'equazione differenziale, scopriamo che funzioni analitiche, definita attraverso serie di potenze con infiniti termini, sono legate alla soluzioni di equazioni polinomiali con un numero finito di termini, e questo legame ci rivela un'oggetto geometrico inaspettato: le curve ellittiche!

Concludiamo questa sezione osservando che in questo caso, al contrario di quanto accadeva per la funzione $\sin(x; P)$, i coefficienti dell'equazione polinomiale dipendono dal periodo τ; questo ci dice che anche a livello algebrico, e non solo metrico, la curva ellittica E_τ dipende da τ.

3. La funzione θ di Riemann

Per il prossimo esempio ci muoveremo verso un livello di generalità leggermente più alto e spiegheremo meno dettagli rispetto alle sezioni precedente. Ci teniamo a ribadire che le idee principali sono sempre le stesse. Avvertiamo inoltre il lettore che le formule esplicite diminuiranno in favore di considerazioni geometriche un po' più astratte; questo perché, aumentando la generalità, le descrizioni geometriche diventano, almeno per l'autore, più semplici da gestire rispetto delle formule esplicite.

Sostituiremo il piano complesso $\mathbb{C}$ con lo spazio vettoriale g-dimensionale $\mathbb{C}^g$, dove g è un intero positivo maggiore di uno. Indicheremo con z un elemento in $\mathbb{C}^g$, ovvero un vettore di g numeri complessi. Il semipiano $\mathcal{H}$ verrà rimpiazzato dal semipiano di Siegel $\mathcal{H}_g$, che consiste di matrici quadrate di dimensione g a coefficienti complessi, simmetriche e con parte immaginaria definita positiva. Indicheremo con τ un elemento di $\mathcal{H}_g$. Osserviamo che quando $g = 1$, z e τ sono come nella sezione precedente. Denoteremo inoltre con $\mathbb{Z}^g$ lo spazio dei vettori formati da g numeri interi relativi.

La funzione θ di Riemann dipende dipende da z e τ ed è definita nel modo seguente:

$$\theta(z;\tau) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \exp\left(\pi\sqrt{-1}\sum_{i,j=1}^{g} \tau_{i,j} m_i m_j + 2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{g} m_i z_i\right)$$

Ci troviamo di fronte a una funzione analitica definita su tutto $\mathcal{H}_g \times \mathbb{C}^g$. Al contrario della funzione $\wp$ di Weierstrass, non ci sono denominatori nella definizione, quindi non dobbiamo escludere nessun valore di z

La funzione θ è soluzione dell'equazione del calore, una delle equazioni differenziali più classiche:

$$\frac{\partial^2\theta}{(\partial\tau_{i_j})^2}(0;\tau) = 2\pi\sqrt{-1}(1+\delta_{i,j})\frac{\partial^2\theta}{\partial z_i \partial z_j}(0,\tau)$$

La precedente equazione è vera per ogni τ in $\mathcal{H}_g$ e per ogni coppia di indici i e j, $\delta_{i,j}$ è il delta di Kronecker.

La funzione θ non è periodica, ma semi-periodica, come descritto dalle equazioni seguenti:

$$\theta(z+m;\tau) = \theta(z,\tau) \qquad \forall m \in \mathbb{Z}^g$$

$$\theta(z+\tau m;) = \exp(\phi(z,\tau,m))\theta(z;m) \qquad \forall m \in \mathbb{Z}^g$$

Il fattore $\exp(\phi(\tau, m))$ è qualche volta chiamato cociclo; essendo un esponenziale, non è mai nullo. La sua definizione è:

$$\phi(z,\tau,m) := -\pi\sqrt{-1}\sum_{i,j=1}^{g} \tau_{i,j} m_i m_j - 2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{g} m_i z_i\,.$$

Questa semi-periodicità ci dice che la funzione θ, per τ fissato, ha voglia di essere pensata come una funzione sul quoziente $A_\tau = \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g \oplus \tau\mathbb{Z}^g)$; questo oggetto prende il nome di varietà abeliana, ed è una generalizzazione in dimensione più alta delle curve ellittiche. Purtroppo, già da $g = 2$, non c'è un modo ragionevole di disegnarlo, lo possiamo comunque immaginare come una curva ellittica. Anche in questo caso τ può essere ricostruito attraverso opportuni integrali su A_τ.

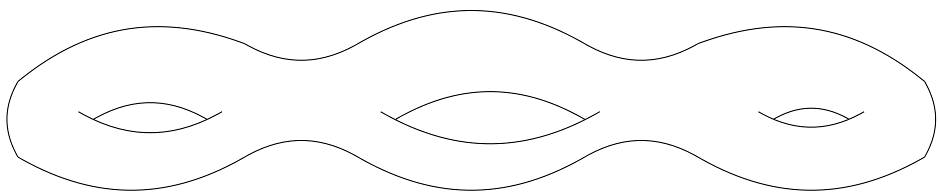
Quando $g > 1$, per utilizzare con profitto la funzione theta, si introducono delle varianti dette funzione theta con caratteristica. Una caratteristica è un vettore ϵ di lunghezza g contenente solo zeri o uni, ce ne sono 2^g. La funzione theta con caratteristica ϵ si indica con $\theta[\epsilon](z;\tau)$; la definizione e la semi-periodicità sono simili a quelle della funzione θ perciò non le scriveremo. Con queste funzioni possiamo immergere[1] A_τ dentro uno spazio proiettivo:

$$\begin{array}{rccc} \iota_\tau : & A & \to & \mathbb{P}^{2^g-1} \\ & [z] & \mapsto & [\cdots : \theta[\epsilon](z;\tau) : \cdots] \end{array}$$

ricordiamo che il valore di $\theta[\epsilon](z;\tau)$ e quello di $\theta[\epsilon](z+\tau m;\tau)$ non sono uguali, tuttavia differiscono per la costante moltiplicativa $\exp(\phi(z,\tau,m))$ non nulla, che quindi non influenza le coordinate omogenee dello spazio proiettivo.

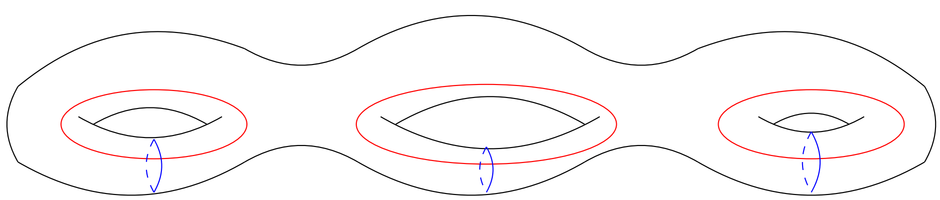
Anche le funzioni theta con caratteristica soddisfano equazioni differenziali notevoli, da cui si deduce che A_τ è il luogo delle soluzioni di un sistema di equazioni di secondo grado. Come nel caso della funzione $\wp$, i coefficienti di queste equazioni dipendono da τ.

Esistono delle matrici τ in $\mathcal{H}_g$ più speciali delle altre: sono quelle ottenute attraverso integrali su superfici di Riemann. Le superfici di Riemann sono oggetti simili alle curve ellittiche e relativamente facile da visualizzare, le introduciamo con una figura:



Il genere di una superficie di Riemann è "il numero di buchi"[2] e si denota con g; nel disegno $g = 3$.

Su una superficie di Riemann possiamo considerare le uno forme differenziali olomorfe. Quello che è veramente importante sapere è che, data una forma differenziale olomorfa ω, qualunque cosa essa sia, ne possiamo calcolare l'integrale lungo una curva sulla superficie di Riemann. In particolare, consideriamo le seguenti curve[3] $A_1, \ldots, A_g$ (in rosso) and $B_1, \ldots, B_g$ (in blu) sulla superficie di Riemann:



[1] in realtà ι_τ è un morfismo due a uno invece che un'immersione, l'immagine la cosiddetta varietà di Kummer associata a A_τ. Per semplicità ignoreremo questo fatto e faremo finta che ι_τ è un'immersione come nelle sezioni precedenti.

[2] per gli esperti, una superficie di Riemann è una varietà liscia compatta complessa di dimensione uno, il suo genere è la metà del primo numero di Betti

[3] ancora per gli esperti, stiamo prendendo una base simpatetica dell'omologia

un teorema classico ci dice che esistono g forme olomorfe $\omega_1, \ldots, \omega_g$ tali che

$$\int_{A_i} \omega_j = \delta_{i,j} \ ,$$

dove $\delta_{i,j}$ è il delta di Kronecker. Adesso definiamo

$$\tau_{i,j} = \int_{B_j} \omega_i$$

La matrice dei periodi τ della superficie di Riemann è la collezione dei $\tau_{i,j}$ appena definiti. Le relazioni bilineari di Riemann ci dicono che τ appartiene al semipiano di Siegel $\mathcal{H}_g$, ovvero τ è una matrice simmetrica e con parte immaginaria definita positiva.

In questa sezione il termine periodi ha una doppia accezione: la matrice dei periodi di una superficie di Riemann è un periodo in quanto periodo di una funzione θ e in quanto integrale di forme differenziali sulla superfici di Riemann.

Il luogo Jacobiano $\mathcal{J}_g$ è il sottoinsieme di $\mathcal{H}_g$ formato dalle matrici dei periodi di superficie di Riemann. A questo punto non possiamo non menzionare il Teorema di Torelli[4]: se due superfici di Riemann hanno la stessa matrice dei periodi, allora sono isomorfe.

Quando $g \geq 4$, il luogo Jacobiano è molto piccolo dentro $\mathcal{H}_g$: data una matrice τ in $\mathcal{H}_g$ scelta a caso, è molto difficile che essa sia una matrice dei periodi di una superficie di Riemann.

Il problema di Schottky chiede di caratterizzare il luogo Jacobiano. In altri termini, risolvere il problema di Schottky significa trovare un criterio per capire se una matrice è una matrice dei periodi di una superficie di Riemann.

Vogliamo chiudere queste note parlando di una delle molte soluzione di questo problema. Ripartiamo dalla varietà abeliana A_τ e prendiamo due punti x e y. Dentro $\mathbb{P}^{2^g-1}$, possiamo tracciare la retta L passante per x e y. Ci chiediamo se questa retta è una trisecante, ovvero se interseca A_τ in un terzo punto z.

Tendenzialmente ci aspettiamo che L non sia una trisecante. Ci sono due ordini di ragioni che sorreggono questa aspettativa. Il primo è geometrico e lo esporremmo molto vagamente. La varietà abeliana A_τ è molto piccola dentro lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^{2^g-1}$, per piccola intendiamo che la sua dimensione è piccola rispetto alla dimensione dello spazio ambiente, perciò ci aspettiamo che una retta la intersechi il meno possibile. Per avere in mente un'immagine, pensate a una curva sghemba generica nello spazio tridimensionale: tendenzialmente non avrà nessuna trisecante.

Il secondo ordine di ragioni è legato allo studio delle funzioni theta. Avere una trisecante L che passa per tre punti α, β e γ di A_τ significa che esistono due numeri complessi a e b e tre punti α,β e γ in A_τ (possiamo pensare questi tre punti come tre vettori di lunghezza g) tali che

$$\theta[\epsilon](\alpha;\tau) = a\theta[\epsilon](\beta;\tau) + b\theta[\epsilon](\gamma;\tau) \qquad \forall\, \epsilon$$

Ma questo è un sistema con 2^g equazioni (una per ogni ϵ) e $3g+2$ incognite (i tre punti su A_τ danno $3g$ incognite, a e b sono le altre due): ci aspettiamo che, per g abbastanza grande, questo sistema non abbia soluzioni.

Ciò detto, negli anni settanta John Fay scoprì una formula, ormai detta la formula trisecante di Fay, che ci dice che la varietà abeliana ha molte[5] trisecanti quando la matrice τ è la matrice dei periodi di una superficie di Riemann. La dimostrazione è abbastanza delicata, l'idea è che il problema si può tradurre in un problema sulla superficie di Riemann e lì le cose sono più semplici che su A_τ.

[4]Questo teorema è stato dimostrato da Ruggiero Torelli (Napoli, 7 giugno 1884 - Monfalcone, 9 settembre 1915)

[5]per gli esperti, una famiglia di trisecanti di dimensione quattro

Ci sono voluti molti anni di lavoro di molti matematici per dimostrare che questa è effettivamente una soluzione del problema di Schottky: adesso sappiamo che se la varietà abeliana ha una trisecante allora la matrice τ corrispondente è la matrice dei periodi di una superficie di Riemann.

Dipartimento di Matematica e Fisica, Università Roma Tre, Largo San Leonardo Murialdo, 1 00146, Roma, Italy.

E-mail address: `codogni@mat.uniroma3.it`