Esercitazione 1
Istituzioni di Matematica per Biologi
Universitá degli Studi di Roma Tre
Anno Accademico 2012/13

1. Disequazioni algebriche

$$\text{a) } \frac{(1-x^3)(x^4-5x^2+6)}{\sqrt{3-2x}} \qquad \text{b) } \sqrt{2x^2-6+x}-x\leq 3 \qquad \text{c) } x^3-5x^2-3x+15<0$$

2. Sistemi di disequazioni algebriche

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt[3]{x^2+2x}>0 \\ \frac{-5}{x^3-8}\leq 0 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{5}{x-3}-\frac{1}{x+3}>0 \\ \sqrt{x-2}<x \end{cases} \qquad \text{c) } \begin{cases} \frac{1-x}{x+2}>0 \\ x^4-16\leq 0 \\ \frac{1}{4-x^2}+\frac{2}{2-x}<\frac{x}{x+2} \end{cases}$$

3. Disequazioni con valori assoluti

$$\text{a) } x-|2-x|+2|x|>0 \qquad \text{b) } 3|1-4x^2|+x^2+3x-2>0 \qquad \text{c) } \frac{1-3|x|}{3|x|+2x}<0$$

4. Disequazioni esponenziali

$$\text{a) } 7\left(\frac{1}{2}\right)^x-14<0, \qquad \text{b) } e^{2x}-5e^x+4<0, \qquad \text{c) } 27\cdot 5^x+7\cdot 3^x-12\cdot 3^x+12\cdot 5^x<0$$

5. Disequazioni logaritmiche

$$\text{a) } \log(x^2-4x+2)<2 \qquad \text{b) } \ln(4-2x)+\ln x>e$$

$$\text{c) } \log_{0.5}(1-x)+\log_{0.5}(2x-1)>\log_{0.5}(10) \qquad \text{d) } \log_3(x-1)+\log_9(2x+1)>\log_3(27)$$

6. Disequazioni trascendenti

$$\text{a) } \frac{\log(1-x)}{16-2^x}<0 \qquad \text{b) } \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-3^x-1\right]\log_2(2x)<0$$

7. Equazioni goniometriche

$$\text{a) } 1-2\cos x=0 \qquad \text{b) } \tan x+1=0 \qquad \text{c) } \frac{1-4\cos^2 x}{2\sin x-\sqrt{3}}>0$$

8. Studiare il dominio ed il segno delle seguenti funzioni

$$\text{a) } f(x)=\frac{|x-3|-2}{x^2-x} \qquad \text{b) } f(x)=\log(x^2-1)x \qquad \text{c) } f(x)=\frac{\sqrt{x^2+2x-1}}{e^x-1}$$

$$\text{d) } f(x)=|e^{x^2-x}| \qquad \text{e) } f(x)=e^{\frac{1}{x}} \qquad \text{f) } f(x)=\frac{\log|x|}{\sin x-1}$$

Soluzioni:

1.

2.

3. (a)
   (b)
   (c)

$$27\cdot 5^x+7\cdot 3^x-12\cdot 3^x+12\cdot 5^x<0,$$

si raccolgono i termini simili

$$(27+12)\cdot 5^x+(7-12)\cdot 3^x<0,$$

si somma e si trasporta uno dei due esponenziali e destra

$$39 \cdot 5^x < 5 \cdot 3^x,$$

dividendo ambo i membri per $39 \cdot 3^x$ e semplificando

$$\frac{\cancel{39} \cdot 5^x}{\cancel{39} \cdot 3^x} < \frac{5 \cdot \cancel{3^x}}{39 \cdot \cancel{3^x}},$$

per le proprietá delle potenze

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x < \frac{5}{39},$$

passando ai logaritmi e ricordando che il verso della disequazione non viene cambiato essendo la base maggiore di uno

$$x < \log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{5}{39}\right),$$

utilizzando infine le proprietá dei logaritmi (cambiamento di base, somma e sottrazione)

$$x < \frac{\log 5 - \log 3}{\log 5 - \log 39}.$$

4. (a)
   (b)
   (c)
   (d)

$$\log_3(x-1) + \log_9(2x+1) > \log_3(27)$$

utilizzando al secondo membro la proprietá di cambiamento di base e quella della moltiplicazione per una costante $\log_9(2x+1) = \frac{\log_3(2x+1)}{\log_3 9} = \frac{\log_3(2x+1)}{2} = \frac{1}{2}\log_3(2x+1) = \log_3(2x+1)^{\frac{1}{2}} = \log_3\sqrt{2x+1}$

$$\log_3(x-1) + \log_3\sqrt{2x+1} > \log_3(27)$$

applicando le proprietá di somma e sottrazione dei logaritmi

$$\log_3[(x-1)\sqrt{2x+1}] > \log_3(27)$$

semplificando i logaritmi

$$(x-1)\sqrt{2x+1} > 27$$

imponendo la condizione sul dominio della disequazione che $2x+1 \geq 0$ e quindi $x \geq -\frac{1}{2}$, é possibile elevare al quadrato ambo i membri della disequazione

$$(x-1)^2(2x+1) > 27^2$$

svolgendo i calcoli algebrici si giunge all'equazione di terzo grado

$$2x^3 - 3x^2 - 729 < 0 \qquad (1) \tag{1}$$

si nota applicando il metodo di Ruffini o con Le Formule di Cardano (Wikipedia), che l'equazione ammette l'unica soluzione reale

$$x_1 = \left(\frac{27\sqrt{365}}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{1459}{8}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\left(\frac{27\sqrt{365}}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{1459}{8}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{2} \approx 7.679927020212685,$$

e quindi la soluzione di 1 sará $x < x_1$, che confrontata con la condizione sul dominio dará come soluzione dell'equazione di partenza:

$$\frac{1}{2} < x < x_1.$$