Esercitazione 2
Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Biologia
Anno Accademico 2012/13

Docente: **Moreno Concezzi.**
Corso: **Istituzioni di Matematica per Biologia.**

Esempio: Sia

$$A = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}$$

non é immediato calcolare chi sia il massimo o minimo (sup o inf) dell'insieme, si nota peró che essa é una sucessione decresente di valori, sostituendo infatti $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5...$ all'espressione si ottiene che per $n = 0$ l'espressione non é definita, per $n > 0$, $\frac{1}{1} = 1$, $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{1}{3} = 0.\bar{3}$, $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{1}{5} = 0.2$ che pare essere una succesione decrescente e sicuramente positiva che parte da 1.
Proviamo che é decrescente, se é cosi allora deve valere che se $a_n = \frac{1}{n}$ ed $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, allora $a_{n+1} < a_n$ per ogni $n > 0$, bisogna quindi risolvere la disequazione

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

e verificare che essa é valida per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, se cosí é allora 1 sará anche max, e quindi anche sup (provarlo).
Calcoliamo adesso l'inf/min. Provando a considerare un possibile candidato l, é abbastanza immedaito che esso possa essere zero, sia allora $l = 0$, per verificare che é cosi deve valere che $\forall \epsilon > 0$, $|a_n - l| < \epsilon$, ovvero

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon,$$

risolvendo la disequazione si nota che la relazione é verificata per ogni $n > 0$, concludiamo dunque che $\inf(A) = 0, \max(A) = 1$.

Esercizi

Per ciascuno dei seguenti insiemi stabilire se é limitato, se ammette *massimo* e/o *minimo*, determinare *estremo superiore* ed *estremo inferiore*:

1. level 0
$$A = \left\{ \frac{1}{n+2}; n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad B = \{-2 < x < 3; x \in \mathbb{R}\} \qquad C = \mathbb{N} \cap [-5, 4]$$

2. level 1
$$A = \{|x+2| > 4; x \in \mathbb{R}\} \qquad B = \{|x+1| \le 3; x \in \mathbb{R}\} \qquad C = \mathbb{Q} \cap [0, \sqrt{2}],$$
$$C = \left\{ \frac{x-1}{x} \le 0; x \in \mathbb{R} \right\} \qquad E = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \right\},$$
$$F = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{3n^2}{4n+1}, n \in \mathbb{N} \right\} \qquad G = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{(-1)^n}{2n}, n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$$

3. level 2 (abbastanza impegnativo)
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| \frac{x-1}{x+1} \right| > x+1 \right\} \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x+1| > \sqrt{x+1} \right\}$$
$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x+2| \le 4, x^2 - 5x > -4 \right\} \qquad D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} < \sqrt{x}+1 \right\}$$
$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} : 2^{2x} \ge 4^{x^2-2} \right\} \qquad F = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+1} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{4x} \right\}$$

4. level 3 (impegnativo)
$$A = \left\{ \sum_{k=0}^{n} 2^k, n \in \mathbb{N} \right\} \qquad B = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}, n \in \mathbb{N} \right\}$$
$$C = \{A \in \mathbb{R} : A - A|x| \le |x-1|, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}\}$$
$$D = \{A \in \mathbb{R} : \sin(x) + A \ge \cos(x), \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}\}.$$

Soluzioni

1. (a) $\inf(A) = 0$, $\max(A) = \frac{1}{3}$.

   (b) $\inf(B) = -2$, $\sup(B) = 3$.

   (c) Essendo il sottinsieme di $\mathbb{N}$ che ci interessa $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, la loro intersezione sará proprio il precedente, e quindi si ottiene $\min(C) = 0$, $\max(C) = 4$.

2. (a) $|x + 2| > 4$ e' equivalente a $x + 2 < -4 \cup x + 2 > 4$ e quindi $x < -6 \cup x > 2$ e quindi $\inf(A) = infty$ e $\sup(A) = +\infty$

   (b)

   (c)

   (d)

   (e)

   (f)

3. (a) ricordando che in generale $|A| > B$ se solo se $A < -B \cup A > B$, bisogna risolvere il sistema:

$$\frac{x-1}{x+1} < -x - 1 \qquad \bigcup \qquad \frac{x-1}{x+1} > x + 1$$

   moltiplicando ambo i membri di entrambe per $x + 1$ con la condizione che $x \neq -1$

$$x - 1 < (-x - 1)(x + 1) \qquad \bigcup \qquad x - 1 > (x + 1)(x + 1)$$

   a questo punto si risolvono le due disequazioni di secondo grado e se ne trovano le soluzioni con i relativi intrvalli, chiamiamoli S_1 e S_2, quindi im max o sup sará il max o sup tra quelli due intervalli, e nalogamente per l'inf o il min.

   (b) dopo aver imposto la condizione sul radicando $x \geq -1$, si elevano al quadrato ambo i membri $(x + 1)^2 > x + 1$ e poi basta svolgere la semplice disequazione di secondo grado e confrontarla con la condizione sul radicando.

   (c) la prima disequazione equivale a $-6 \leq x \leq 2$, mentra le seconda é una disequazione di secondo grado $x^2 - 5x + 4 > 0$ le cui soluzioni sono $x < 1 \cup x > 4$, basta quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} -6 \leq x \leq 2 \\ x < 1 \cup x > 4 \end{cases}$$

   e deterimanrne gli estremi della soluzione.

   (d) Dopo aver imposto la condizione di accettabilitá $x \geq 0$, si sostituisce $\sqrt{x} = t$ ottenendo $\frac{t}{t+1} < t + 1$, una volta determinati gli intervalli soluzione si riapplica la sostituzione la contrario confrontando la soluzione con la condizione di accettabilitá

   (e) ricordando che $4 = 2^2$, si ottiene $2^{2x} \geq 2^{2(x^2-2)}$, applicando la regola dell'uguaglianza tra esponenti si ottiene $2x \geq 2(x^2 - 2)$, si risolve poi la disequazione di secondo grado.

   (f) Analogo all'esercizio precedente ma ricordando che essendo la base dell'esponente minore di 1 il verso della disequazione cambia.

4. (a) Basta riscordare la formula per il calcolo della somma di una serie geometrica e vedere al variare di n come si comporta.

   (b) Vedi esercizio prededente

   (c) Si tratta di studiare prima i due moduli che danno da studiare i 3 sistemi

$$\begin{cases} x < 0 \\ A - A(-x) \leq -(x - 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ A - A(x) \leq -(x - 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ A - A(x) \leq x - 1 \end{cases}$$

delle cui soluzioni va poi fatta l'unione e calcolati quindi gli estremi della soluzione complessiva, si ricordi che A puó assumere qualunque valore, il che significa che nisogna cambaire il verso della disequazione quando é dovuto, il che porterá a studiare gli ulteriori casi.

(d) $\sin(x) + A \geq \cos(x)$ é una disequazione lineare omogenea in seno e cosena, si risolve ad esempio attraverso la sostituzione con le formule parametriche $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ dove $t = \tan\frac{x}{2}$, fare attenzione allo studiare lo soluzioni al variare del parametro A.