Esercitazione 3
Istituzioni di Matematica per Biologi
Universitá degli Studi di Roma Tre
Anno Accademico 2012/13

Determinarne il comportamento asintotico delle seguenti successioni e se possibile calcolarne il limite [1]:

1. (fondamentali)
$$a)\quad a_n = \frac{2^n - \log n}{n! - n^n}, \qquad b)\quad a_n = \frac{\log n^b}{\log n}.$$

2.
$$a)\quad a_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}}, \qquad b)\quad a_n = \frac{2n-1}{3n+2}, \qquad c)\quad a_n = \frac{an+b}{cn+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

3.
$$a)\quad a_n = \sqrt{\frac{n^2+2}{2n^2-1}}, \qquad b)\quad a_n = \frac{\sin(n)}{n}, \qquad c)\quad a_n = n - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

4.
$$a)\quad a_n = \log_2 n, \qquad b)\quad a_n = (-1)^n \log_2(n), \qquad c)\quad a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \qquad d)\quad a_n = \sqrt{n^2+n} - n.$$

5.
$$a)\quad a_n = \frac{\sqrt{2n^2-3}}{3n+1}, \qquad b)\quad a_n = \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}}, \qquad c)\quad a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n},$$

6.
$$a)\quad a_n = \frac{n^2+5n^6+3}{n!}, \qquad b)\quad a_n = \frac{3^n n^2}{4^n - n}, \qquad c)\quad a_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)^n}{(2n)!}},$$

7. nello svolgimento dimostrare il comportamento ottenuto (mediamente impegnativi)
$$a)\quad a_n = \frac{n^n}{4^n n!}, \qquad b)\quad a_n = \frac{n^n}{n!}, \qquad c)\quad a_n = \cos(n),$$
$$d)\quad a_n = \sqrt[n]{n}, \qquad e)\quad a_n = \sqrt[n]{n!},$$

8. (impegnativo)

   (a) Sia $m \in \mathbb{N}$, fissato e sia
   $$a_n = \sum_{k=0}^{n} k^m.$$
   Determinare il comportamento delle seguenti successioni
   $$a1)\quad \frac{a_n}{n}, \qquad a2)\quad \frac{a_n}{n^{m+2}}.$$

   (b) Sia a_n la successione definita nel seguente modo:
   $$a_0 = 1 \qquad a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n} \qquad \forall n \geq 2,$$
   Dimostrare che a_n tende a 2. (*Suggerimento: calcolare* a_1, a_2, a_3, a_4 *e* a_5.)

Soluzioni:

1. (a)
   (b)
2. (a)
   (b)
   (c)

[1] ricordare nello svolgimento degli esercizi le stime sulla velocitá di divergenza $\log n \prec n^b \prec a^n \prec n! \prec n^n$, $a, b \in \mathbb{R}$

(d)

3. (a)
   (b)
   (c)

4. (a)
   (b)
   (c)
   (d)

5. (a) ricordando le regole asintotiche, il numeratore si comporta come $\sqrt{2n^2}$ mentre il denominatore come $3n$, passando quindi al limite
$$\frac{\sqrt{2n^2}}{3n} = \frac{\sqrt{2}n}{3n} \to ...$$
   (b) il numeratore si comporta come $\sqrt{n^2}$ mentre il denominatore come $\sqrt[3]{n^3}$, passando quindi al limite si ottiene
$$\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt[3]{n^3}} = ... \to ...$$
   (c)