Esercitazione 4
Istituzioni di Matematiche (Biologia)
Universitá degli Studi di Roma Tre, A.A. 2012/13

1. Calcolare se esistono i seguenti limiti[1]:

$$(a)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{(2^n-n^2)^4}{(4^n-n^4)^2},\qquad (b)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^2-1}}{n},$$

$$(c)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^4-n^3}]}{n+n^\beta}\quad \forall\beta\in\mathbb{R},\quad (d)\quad \lim_{n\to+\infty}n^\alpha(\sqrt[5]{n^2+n}-\sqrt[5]{n^2+2n+1}),$$

$$(e)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-\sin n}{n^2+n},\quad (f)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+n^2\sin\frac{1}{n}}{n^2+1},$$

$$(g)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n)}{\sqrt{n^4+n^3}-n^2},\quad (h)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(\frac{2}{n-1})}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2},$$

$$(i)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(\frac{1}{n^3})}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^\alpha}}-1}\quad \forall\alpha\in\mathbb{R},\quad (l)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(\gamma^n)}{n^{\gamma-1}}\quad \forall\gamma\in\mathbb{R},$$

$$(m)\quad \lim_{n\to+\infty}n^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{2^n}\right)\right),\quad (n)\quad \lim_{n\to+\infty}n^\alpha\left(1-\cos\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)\quad \forall\alpha\in\mathbb{R},$$

(o) Determinare per quali $x\in\mathbb{R}$ la successione converge

$$\lim_{n\to+\infty}[\cos(\pi x)]^{2n}.$$

2. Dire per quali valori del parametro reale $b\in\mathbb{R}$ la seguente successione ammette limite finito o infinito:

$$a_n=b^n\frac{(-1)^n}{(n^2+1)\sin\frac{1}{n^2}}$$

3. Verificare calcolando una approssimazione numerica (utilizzare una calcolatrice) che per n "grande" la successione:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

converge ad $e\in\,]2,3[$.

Soluzioni:

1. (a)
   (b)
   (c)
   (d) si tratta di razionalizzare utulizzando la scomposizione per la differenza tra cubi, in generale:

$$\sqrt[5]{a}-\sqrt[5]{b}=(\sqrt[5]{a}-\sqrt[5]{b})\cdot\frac{\sqrt[5]{a^4}+\sqrt[5]{a^3b}+\sqrt[5]{a^2b^2}+\sqrt[5]{ab^3}+\sqrt[5]{b^4}}{\sqrt[5]{a^4}+\sqrt[5]{a^3b}+\sqrt[5]{a^2b^2}+\sqrt[5]{ab^3}+\sqrt[5]{b^4}}=\frac{a-b}{\sqrt[5]{a^4}+\sqrt[5]{a^3b}+\sqrt[5]{a^2b^2}+\sqrt[5]{ab^3}+\sqrt[5]{b^4}},$$

applicando nel nostro caso, dove $a=n^2+n$ e $b=n^2+2n+1$

$$\lim_{n\to+\infty}n^\alpha(\sqrt[5]{n^2+n}-\sqrt[5]{n^2+2n+1})=$$

$$\lim_{n\to+\infty}n^\alpha(\sqrt[5]{n^2+n}-\sqrt[5]{n^2+2n+1})\times$$

$$\times\frac{\sqrt[5]{(n^2+n)^4}+\sqrt[5]{(n^2+n)^3(n^2+2n+1)^2}+\sqrt[5]{(n^2+n)^2(n^2+2n+1)^2}+\sqrt[5]{(n^2+n)(n^2+2n+1)^3}+\sqrt[5]{(n^2+2}}{\sqrt[5]{(n^2+n)^4}+\sqrt[5]{(n^2+n)^3(n^2+2n+1)^2}+\sqrt[5]{(n^2+n)^2(n^2+2n+1)^2}+\sqrt[5]{(n^2+n)(n^2+2n+1)^3}+\sqrt[5]{(n^2+2}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}n^\alpha\cdot\frac{(n^2+n)-(n^2+2n+1)}{\text{"il denominatore precedente"}}=\lim_{n\to+\infty}n^\alpha\cdot\frac{-n-1}{\text{"il denominatore precedente"}}=$$

[1] Per lo svolgimento degli esercizi ricordare, tra l'altro, che sotto la condizione asintotica che se la successione $a_n\to 0$, allora $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin a_n}{a_n}=0$ e $\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos a_n}{a_n^2}=0$.

$$= \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} \cdot \frac{-n-1}{\text{"il denominatore precedente"}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n^{\alpha+1}-n^{\alpha}}{\text{"il denominatore precedente"}}$$

notando ora che il denominatore ha grado $\frac{8}{5}$ (ogni radicando del denominatore ha grado 8 e l'indice é 5, si fa quindi il loro rapporto), mentre il numeratore ha grado in generale $\alpha+1$, ricordando la regola del rapporto tra i gradi si ha che se il grado del numeratore é maggiore di quello del denominatore il limite vale ∞, al contrario varrá 0, altrimenti se hanno stesso grado si ottiene un valore finito che é pari al rapporto tra i coefficienti dei termini di grado massimo, quindi se:

$$\alpha+1 > \frac{8}{5} \to \alpha > \frac{3}{5} \quad \text{il limite varrá } -\infty,$$

$$\alpha+1 < \frac{8}{5} \to \alpha < \frac{3}{5} \quad \text{il limite varrá } 0,$$

$$\alpha+1 = \frac{8}{5} \to \alpha = \frac{3}{5} \quad \text{il limite varrá } 1.$$

(e)

(f)

(g)

(h)

(i)

(j)

(k)

(l)

(m) Notando che $\frac{1}{2^n}$ é una successione infinitesima, per arrivare al imite notevole del coseno moltiplichiamo e didiamo per $\frac{1}{2^n}$,

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} n^2 \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\left(1-\cos\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} \cdot \frac{\left(1-\cos\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)}{\frac{1}{2^n}},$$

essendo $\frac{(1-\cos(\frac{1}{2^n}))}{\frac{1}{2^n}} \to \frac{1}{2}$ e ricordando per le regole sui confronti asintotici $\frac{n^2}{2^n} \to 0$(l'esponeziale diverge piú velocemente della potenza) si avrá

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} \cdot \frac{\left(1-\cos\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)}{\frac{1}{2^n}} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

(n)

(o)

2.

3.