Esercitazione di Geometria 2 (GE210), a. a. 2013/14
Corso di Laurea in Matematica
Università degli studi Roma Tre

Foglio n° 8
ESERCIZI DI RIEPILOGO

Esercizio 1. Sia $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ lo spazio vettoriale numerico euclideo di dimensione 3 dove $\langle , \rangle$ è il prodotto scalare standard. Sia assegnato l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalla formula:

$$F_1((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + 4x_3)$$

dove (x_1, x_2, x_3) è il sistema di coordinate relativo alla base standard ortonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

(i) Scrivere la matrice A associata ad F nella base $\mathcal{B}$.
(ii) Verificare che l'operatore F è autoaggiunto.
(iii) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F.

Esercizio 2. Sia $(\mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$ lo spazio vettoriale numerico euclideo di dimensione 4 dove $\langle , \rangle$ è il prodotto scalare standard. Sia assegnato l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalla formula:

$$F_1((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_2 - x_4, x_1 - x_3, -x_2 - x_4, -x_1 - x_3)$$

dove (x_1, x_2, x_3, x_4) è il sistema di coordinate relativo alla base standard ortonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

(i) Scrivere la matrice A associata ad F nella base $\mathcal{B}$.
(ii) Verificare che l'operatore F è autoaggiunto.
(iii) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di F.

Esercizio 3. Si consideri il piano reale euclideo $\mathbb{E}^2$ con il riferimento ortonormale standard $RC(O, e_1, e_2)$. Sia assegnata l'applicazione $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ di equazioni

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\, x_1 - \frac{1}{2}\, x_2 + \frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{1}{2}\, x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\, x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(i) Verificare che f è una rotazione e determinare il suo punto fisso C, centro di rotazione.
(ii) Determinare l'angolo θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, della rotazione.
(iii) Considerata la retta $r : y - 1 = 0$, scrivere l'equazione cartesiana della retta $r' = f(r)$.

Esercizio 4. Si consideri il piano reale euclideo $\mathbb{E}^2$ con il riferimento ortonormale standard $RC(O, e_1, e_2)$. Siano date le rette di equazioni:

(1) $r_1 : x_1 + 2x_2 = 1$; (2) $r_2 : 2x_1 - 3x_2 = 0$;

(3) $r_3 : 3x_1 - 4x_2 - 3 = 0$; (4) $r_4 : x + 4x_2 + 3 = 0$.

(i) Determinare la riflessione S_{r_i} rispetto alla retta r_i per ogni $i = 1, 2, 3, 4$.
(ii) Dato il vettore $v = (4, -6)$, calcolare le equazioni delle isometrie $G_i := T_v \circ S_{r_i}$ per ogni $i = 1, 2, 3, 4$.
(iii) Per ogni $i = 1, 2, 3, 4$, riconoscere se G_i è una riflessione o una glissoriflessione. Nel caso in cui G_i è una riflessione determinare la retta s_i tale che $G_i = S_{s_i}$. Nel caso in cui G_i è una glissoriflessione determinare la retta s_i e il vettore v_i parallelo a s_i tale che $G_i = T_{v_i} \circ S_{s_i}$.

Esercizio 5. Sia lo spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ con riferimento cartesiano ortonormale $RC(O, i, j, k)$ (i. e. (i, j, k) è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$). Sia assegnato il piano $\pi : x - 2y + 3z - 1 = 0$. Considerati i punti $A(1, 0, 0)$ e $C(0, 1, 1)$ appartenenti a π, determinare i punti B e D di π in modo che $ABCD$ sia un quadrato avente A e C come vertici opposti.

Esercizio 6. Sia lo spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ con riferimento cartesiano ortonormale $RC(O, i, j, k)$. Siano assegnate le rette

$$r : \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \qquad e \qquad r' : \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x - z = 0. \end{cases}$$

(i) Verificare che r ed r' sono sghembe.
(ii) Calcolare l'angolo θ che esse formano.
(iii) Determinare la retta s incidente e perpendicolare a r e r'.
(iv) Determinare la distanza tra r ed r'.

Esercizio 7. Sia il piano euclideo $\mathbb{E}^2$ con riferimento cartesiano ortonormale $RC(O, i, j)$ (i. e. (i, j) è una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$). Per ciascuna delle seguenti coniche

(1) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$; (2) $x^2 - 2xy + 2y - 1 = 0$;

(3) $x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 + 4x + 3 = 0$; (4) $5x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y = 0$;

(i) dire se è degenere o meno;
(ii) stabilire il tipo di conica;
(iii) determinare la forma canonica euclidea e l'isometria che la riduce in tale forma;
(iv) determinare il centro (se lo ammette) e gli assi di simmetria;
(v) studiare i punti impropri, considerare la conica + i punti impropri in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e determinare la forma canonica della conica proiettiva risultante.

Esercizio 8. Sia lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordinate affini omogenee (X_0, X_1, X_2). Siano assegnati i punti $P_1 = [1, 2, 3], P_2 = [1, 1, -1], Q_1 = [-1, 2, 1], Q_2 = [1, -1, -1]$ e si considerino le rette r e s, la prima passante per P_1 e P_2, la seconda passante per Q_1 e Q_2.

(i) Determinare le equazioni cartesiane in coordinate affini omogenee delle rette r e s.
(ii) Determinare il punto $R = r \cap s$.