Esercitazione di Geometria 2 (GE210), a. a. 2013/14

Corso di Laurea in Matematica

Università degli studi Roma Tre

Foglio n° 1

FORME BILINEARI E FORME QUADRATICHE

Esercizio 1. Stabilire quali delle seguenti sono forme bilineari su $\mathbb{R}^3$ (denotiamo con $v = (x_1, x_2, x_3)$ e $w = (y_1, y_2, y_3)$ vettori di $\mathbb{R}^3$ e con X e Y i vettori colonna delle coordinate di v e w rispettivamente):

(i) $f(v, w) = x_1y_2 - x_3y_3 + x_2$

(ii) $f(v, w) = 2x_1y_1 - x_3y_1 + 3x_3y_2 + 1$

(iii) $f(v, w) = \sum_{i=1}^{3}(x_i + y_i)^2 - \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - \sum_{i=1}^{3} y_i^2$

(iv) $f(v, w) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + x_3y_1$

(v) $f(v, w) = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{pmatrix}$

(vi) $f(v, w) = {}^tXAY$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Per ciascuna forma bilineare trovata, determinare la matrice associata rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ di $\mathbb{R}^3$ e stabilire se è non degenere (simmetrica, antisimmetrica).

Esercizio 2. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Sia data la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

e l'applicazione $f : V \times V \to \mathbb{R}$ così definita: $f(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAMB)$.

(i) Dimostrare che f è una forma bilineare su V.

(ii) Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica di V

$$\left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Stabilire se f è non degenere (simmetrica, antisimmetrica).

(iii) Sia M generica. Caratterizzare le matrici M per le quali f è non degenere (simmetrica, antisimmetrica).

(iv) (**più difficile**) Caratterizzare le matrici M per le quali f è simmetrica (antisimmetrica) per $V = M_n(\mathbb{R})$. (Suggerimento: utilizzando le proprietà della traccia, è sufficiente caratterizzare le matrici M per le quali f è nulla.)

Esercizio 3. Per ciascuna delle forme quadratiche $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seguenti, determinare la forma bilineare polare associata, una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale q si esprime in forma canonica, il rango e la segnatura:

(i) $q(v) = x_1x_2 - x_2x_3 + x_1x_3$

(ii) $q(v) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2$

(iii) $q(v) = 14x_1x_2 - 10x_1x_3 + 17x_2^2 - 6x_2x_3 - 5x_3^2$

(iv) $q(v) = 4x_1x_2 - x_2^2 - x_2x_3$

Esercizio 4. Per ciascuna delle forme quadratiche $q : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ seguenti, determinare la forma bilineare polare associata, una base di $\mathbb{C}^4$ rispetto alla quale q si esprime in forma canonica e il rango:

(i) $q(v) = 2x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 + x_2x_4$
(ii) $q(v) = x_1^2 + x_1x_4 - x_2^2 + 4x_2x_3 - x_4^2$
(iii) $q(v) = 2x_1x_2 - 3x_1x_3 + 4x_1x_4 - 6x_2x_3 + 8x_2x_4 - 12x_3x_4$
(iv) $q(v) = 2x_2x_3$

Esercizio 5.

(i) Dimostrare che ogni forma bilineare f su uno spazio vettoriale su un campo di caratteristica diversa da 2 (per semplicità, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) si può scrivere in modo unico come somma di una forma bilineare simmetrica f_s e una forma bilineare antisimmetrica f_a.
(ii) Considerare le forme bilineari degli Esercizi 1 e 2 e scriverle come somma di una forma bilineare simmetrica e una antisimmetrica.

Esercizio 6. (di riscaldamento per l'Esercizio 7)

(i) Sia $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma bilineare antisimmetrica non nulla. Dimostrare che esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
(ii) Sia $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma bilineare antisimmetrica. Dimostrare che f è degenere.
(iii) Dimostrare che se f di (ii) non è nulla, allora esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
(iv) Per ogni forma antisimmetrica dell'**Esercizio 1**, determinare una base $\mathcal{B}$ che soddisfi la tesi di (iii).

Esercizio 7. Sia $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare antisimmetrica su uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$ (campo di caratteristica diversa da 2). Dimostrare che f ha rango pari e che V ammette una decomposizione $W \oplus \bigoplus_{i=1}^r V_i$ tale che

(i) la somma è **ortogonale** (i. e. W e i V_i sono ortogonali a due a due);
(ii) W è il più grande sottospazio di V tale che f ristretta a W è la forma nulla;
(iii) $\dim V_i = 2$ per ogni $i = 1, \dots, r$ e il rango di f è $2r$.

Dimostrare che esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che le matrice associata a f rispetto a $\mathcal{B}$ è
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & & & \\ & & 0 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 0 & -1 & & & \\ & & & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Osservare che, permutando opportunamente gli elementi di $\mathcal{B}$, la matrice di f rispetto alla nuova base diventa
$$\begin{pmatrix} 0 & -I_r & 0 \\ I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{dove } I_r \text{ è la matrice identità } r \times r.$$