Esercitazione di Geometria 2 (GE210), a. a. 2013/14
Corso di Laurea in Matematica
Università degli studi Roma Tre

Foglio n° 2
PRODOTTI SCALARI

Esercizio 1. Per ciascuna delle forme quadratiche $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ seguenti, stabilire usando il criterio di Sylvester (o altri metodi, ma senza diagonalizzare col metodo dei vettori non isotropi) se è definita positiva, definita negativa e indefinita.

(i) $q(v) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 2x_2x_4 - 2x_3^2 - 2x_3x_4$
(ii) $q(v) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$
(iii) $q(v) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_4^2$
(iv) $q(v) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_4 + 9x_3^2 + 7x_4^2$
(v) $q(v) = -4x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 3x_2^2 + 4x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3^2 + 2x_3x_4 - x_4^2$
(vi) $q(v) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 7x_2^2 + 10x_2x_4 + x_3^2 + 8x_4^2$

Le forme quadratiche definite positive inducono un prodotto scalare $\langle , \rangle$ su $\mathbb{R}^4$. Per queste ultime determinare una base ortonormale usando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

Esercizio 2. Dimostrare che una matrice simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ è semidefinita positiva se e solo se esiste una matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ tale che $A = {}^tMM$.

Esercizio 3. Sia lo spazio vettoriale euclideo $(V = \mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$ dove $\langle , \rangle$ è il prodotto scalare standard. Sia W lo spazio generato dai vettori

$$w_1 = (1, 1, 0, 1), \quad w_2 = (1, -1, 0, -1), \quad w_3 = (3, 1, 0, 1).$$

Determinare la dimensione di W, trovarne una base ortonormale ed estendere tale base a una base ortonormale di V.

Esercizio 4. Sia V_n lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ generato dai polinomi di grado $\leq n$, vale a dire

$$V_n = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Per ogni $p, q \in V_n$, sia

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$$

(i) Dimostrare che $\langle , \rangle$ è un prodotto scalare.
(ii) Scrivere la matrice associata a $\langle , \rangle$ rispetto alla base $(1, t, \ldots, t^n)$.
(iii) Trovare una base ortogonale per $n \leq 4$ usando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.
(iv) (**più difficile**) Sapreste trovare una base ortogonale per ogni $n \in \mathbb{N}$?