Esercitazione di Geometria 2 (GE210), a. a. 2013/14
Corso di Laurea in Matematica
Università degli studi Roma Tre

Foglio n° 3
OPERATORI UNITARI: SIMMETRIE E ROTAZIONI

Esercizio 1. Siano le applicazioni lineari $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ così definite:

(1) $F((1,0)) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ e $F((0,1)) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$;

(2) $F((1,0)) = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ e $F((0,1)) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$;

(3) $F((1,0)) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $F((0,1)) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

(4) $F((1,0)) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $F((0,1)) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

(5) $F((1,0)) = \left(\frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right)$ e $F((0,1)) = \left(\frac{15}{17}, -\frac{8}{17}\right)$.

(i) Determinare quali di esse sono operatori unitari.
(ii) Riconoscere le rotazioni e determinare i relativi angoli di rotazione.
(iii) Riconoscere le simmetrie e determinare i relativi assi di simmetria.

Esercizio 2. Sia $(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle)$ il piano vettoriale euclideo con il prodotto scalare standard $\langle , \rangle$. Denotiamo con $S, S' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le simmetrie ortogonali rispetto alle rette vettoriali

$$W : x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0 \quad \text{e} \quad W' : \sqrt{3}x_1 - x_2 = 0.$$

(i) Determinare le matrici ortogonali A, A' associate rispettivamente a S, S' nella base ortonormale standard $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.
(ii) Considerata la composizione $R = S' \circ S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, verificare che R è una rotazione.
(iii) Determinare l'angolo ϕ della rotazione R.

Esercizio 3. Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo su $\mathbb{R}$ di dimensione n e sia $P : V \to V$ una applicazione lineare di rango $n-1$ tale che $P^2 = P$. Dimostrare che l'applicazione $2P - I$ è la simmetria ortogonale rispetto all'iperpiano $W = \mathrm{Im}(P) \subset V$.

1 **Esercizio 4.** Sia lo spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$, dove $\langle , \rangle$ è il prodotto scalare standard e sia $R \in SO(3)$, vale a dire un operatore unitario $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che preservi l'orientazione ($SO(3)$ si dice **gruppo delle rotazioni** di $\mathbb{R}^3$).

(i) Dimostrare che se $R \neq I$, allora ammette l'autovalore $\lambda = 1$ con autospazio relativo di dimensione 1. Tale autospazio è detto **asse di rotazione** di R.
(ii) Dimostrare che esiste una base (v_1, v_2, v_3) concordemente orientata con la base standard tale che la matrice relativa a R rispetto a tale base è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

per qualche $\theta \in [0, \pi]$. L'angolo θ è univocamente determinato e si dice **angolo (convesso) di rotazione** di R.

$\boxed{2}$ **Esercizio 5.** Sia $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ lo spazio vettoriale euclideo tridimensionale con il prodotto scalare standard $\langle , \rangle$. Denotiamo con $S, S' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le simmetrie ortogonali rispetto ai piani vettoriali di equazioni

$$W : x_1 - x_2 = 0 \quad \text{e} \quad W' : x_2 - x_3 = 0.$$

(i) Determinare le matrici ortogonali A, A' associate rispettivamente a S, S' nella base ortonormale standard $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
(ii) Considerata la composizione $R = S' \circ S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, determinare l'asse di rotazione e l'angolo di rotazione di R.

Esercizio 6. (Angoli di Eulero) Si assumano le stesse ipotesi iniziali dell'esercizio 4. Dato $\theta \in [0, 2\pi)$, si definiscano gli operatori $A_\theta, C_\theta : V \to V$ tali che le loro matrici associate rispetto alla base standard (e_1, e_2, e_3) siano rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che sono univocamente determinati $0 \le \phi, \psi < 2\pi$ e $0 \le \theta \le \pi$ tali che

$$R = C_\phi \circ A_\theta \circ C_\psi.$$

Gli angoli ϕ, ψ, θ sono detti **angoli di Eulero** di R.

Esercizio 7.

(i) Trovare gli angoli di Eulero della rotazione R dell'esercizio 5.
(ii) Sia $R : V \to V$ l'applicazione lineare tale che

$$\begin{aligned} R((1,0,0)) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \\ R((0,1,0)) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right), \\ R((0,0,1)) &= \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

Dimostrare che R è una rotazione, determinare il suo asse di rotazione e gli angoli di Eulero.