Esercitazione di Geometria 2 (GE210), a. a. 2013/14
Corso di Laurea in Matematica
Università degli studi Roma Tre

Foglio n° 4
OPERATORI SIMMETRICI E TEOREMA SPETTRALE

Esercizio 1. Siano gli operatori lineari $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ così definiti:

(1) $F((x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$;

(2) $F((x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$;

(3) $F((x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} 1 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$;

(4) $F((x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$;

(5) $F((x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

(i) Determinare quali di essi sono operatori simmetrici rispetto al prodotto scalare standard $\langle , \rangle$.
(ii) Per ciascun operatore simmetrico, trovare una base ortonormale che lo diagonalizza.
(iii) Sia ora il nuovo prodotto scalare

$$(v, w) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2,$$

dove $v = (x_1, x_2)$ e $w = (y_1, y_2)$. Ripetere i punti (i) e (ii) col nuovo prodotto scalare $(,)$.
(iv) Nella lista vi sono degli operatori lineari che non sono simmetrici né rispetto a $\langle , \rangle$, né rispetto a $(,)$. Per ciascuno di essi trovare, se esiste, un prodotto scalare rispetto al quale l'operatore è simmetrico.
(v) Per ciascuno degli F, determinare tutti i prodotti scalari rispetto ai quali F è simmetrico.

Esercizio 2. Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e sia $F : V \to V$ un operatore lineare. A priori F non è autoaggiunto rispetto a $\langle , \rangle$. Esiste sempre un prodotto scalare su V rispetto al quale F è autoaggiunto? E se no, sotto quali condizioni?

Esercizio 3. Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e sia $F : V \to V$ una operatore lineare tale che $\langle F(v), v\rangle = 0$ per ogni $v \in V$.

(i) Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V e sia A la matrice associata a F rispetto a tale base. Che cosa possiamo dire su A?
(ii) Si supponga inoltre che F sia autoaggiunto. Cosa possiamo dire su A?
(iii) Sotto quali condizioni esiste un prodotto scalare su V rispetto al quale F è autoaggiunto?

Esercizio 4. Sia lo spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$, dove $\langle , \rangle$ è il prodotto scalare standard. Siano date le seguenti forme quadratiche $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

(1) $q(v) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$;
(2) $q(v) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2$
(3) $q(v) = -3x_1^2 + 2\sqrt{2}\, x_1x_3 + x_2^2 - 2x_3^2$;
(4) $q(v) = x_1^2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + x_3^2$.

dove $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Per ciascuna di esse trovare una base ortonormale che la diagonalizza e scrivere la corrispondente forma diagonale. (Attenzione a non fare confusione con l'espressione canonica data dal teorema di Sylvester.)

Esercizio 5. Dimostrare che se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è una matrice antisimmetrica, ogni radice non nulla del suo polinomio caratteristico è un numero complesso puramente immaginario.