Esercitazione di Geometria 2 (GE210), a. a. 2013/14
Corso di Laurea in Matematica
Università degli studi Roma Tre

Foglio n° 5
ISOMETRIE NEL PIANO

Esercizio 1. Siano date le affinità sul piano reale euclideo $F : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ di equazioni:

$$(1) \quad F(X) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (2) \quad F(X) = X + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad F(X) = \begin{pmatrix} \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & -\frac{7}{5} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{3}{25} \\ -\frac{4}{25} \end{pmatrix} \qquad (4) \quad F(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$(5) \quad F(X) = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (6) \quad F(X) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

dove ${}^tX = (x_1, x_2)$ rispetto al riferimento ortonormale standard $RC(O, e_1, e_2)$.

(i) Individuare le isometrie.
(ii) Riconoscere le isometrie dirette e inverse.
(iii) Per ciascuna delle isometrie, determinare il luogo dei punti fissi.
(iv) Individuare le rotazioni, le traslazioni e le riflessioni. In particolare:
  (a) Per ciascuna rotazione, determinare il centro di rotazione e l'angolo di rotazione;
  (b) Per ciascuna traslazione, determinare il vettore di traslazione;
  (c) Per ciascuna riflessione, determinare l'asse di riflessione.
(v) Data la retta $r \subset \mathbb{E}^2$ di equazione $3x_1 - 4x_2 = 0$, determinare l'immagine di r mediante tutte le isometrie.

Esercizio 2. Si consideri il piano reale euclideo con il riferimento ortonormale standard $RC(O, e_1, e_2)$.

(i) Siano date le rette $r \subset \mathbb{E}^2$ di equazioni:

$$(1) \quad 2x_1 + 3x_2 - 1 = 0 \qquad (2) \quad 3x_1 - 5x_2 + 2 = 0$$

$$(3) \quad x_1 + 4x_2 = 0 \qquad (4) \quad -2x_1 + 5_2 + 4 = 0$$

Denotando con S_r la riflessione rispetto alla retta r, determinare le equazioni di S_r per ogni retta r.
(ii) Determinare le equazioni della rotazione R di angolo $\pi/4$ tale che $R(\sqrt{8}, 2\sqrt{8}) = (-1, 7 - \sqrt{2})$.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{E}^2$ il piano reale euclideo con il riferimento ortonormale standard $RC(O, e_1, e_2)$. Se v è un vettore di $\mathbb{R}^2$, denotiamo con T_v la traslazione di vettore v.

(i) Date due rette $r, r' \subset \mathbb{E}^2$, dimostrare che l'isometria $S_{r'} \circ S_r$ è una rotazione oppure una traslazione. Caratterizzare le coppie di rette (r, r') tali che $S_{r'} \circ S_r$ è una traslazione. Come sono fatte tali traslazioni?
(ii) Data una retta $r \subset \mathbb{E}^2$ e un vettore $v \in \mathbb{R}^2$, dimostrare che $T_v \circ S_r$ è una riflessione oppure una isometria che non ammette punti fissi. Sotto quali condizioni su r e v l'isometria $T_v \circ S_r$ è una riflessione?

(iii) Sia $G : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ una isometria che non ammette punti fissi. Dimostrare che esistono univocamente una retta $r \subset \mathbb{E}^2$ e un vettore v parallelo a r tale che $G = T_v \circ S_r$. (Una tale isometria è detta **glissoriflessione**).

(iv) Determinare r e v per le glissoriflessioni dell'Esercizio 1.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{E}^2$ il piano euclideo con il riferimento ortonormale standard $RC(O, e_1, e_2)$. Dato un punto $P \in \mathbb{E}^2$ e $\theta \in [0, 2\pi)$, denotiamo con $R_{P,\theta}$ la rotazione di centro P e angolo θ.

(i) Sia $R_{P,\theta}$ una rotazione e sia $r \subset \mathbb{E}^2$ una retta passante per P. Dimostrare che esistono due rette $s, t \subset \mathbb{E}^2$ passanti per P tali che $R_{P,\theta} = S_r \circ S_s = S_t \circ S_r$.

(ii) Siano $R_{P,\theta}$ e $R_{Q,\varphi}$ due rotazioni con $\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$. Dimostrare che se $\theta + \varphi \neq 2k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, allora $R_{Q,\varphi} \circ R_{P,\theta}$ è una rotazione di angolo $\theta + \varphi$. Dimostrare che è una traslazione se e solo se $\theta + \varphi = 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) Siano due rotazioni come nel punto (ii) tali che $\theta + \varphi \neq 2k\pi$. Denotiamo con P_1 e Q_1 rispettivamente i centri delle rotazioni $R_1 = R_{Q,\varphi} \circ R_{P,\theta}$ e $R_2 = R_{P,\theta} \circ R_{Q,\varphi}$. Dimostrare che P_1 e Q_1 sono simmetrici rispetto alla retta r passante per P e Q (vale a dire $P_1 = S_r(Q_1)$).

(iv) Sia $R_{P,\theta}$ la rotazione dell'Esercizio 1 e sia $R_{Q,\varphi}$ la rotazione definita dalle equazioni

$$R_{Q,\theta}(X) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -2 + \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

dove ${}^tX = (x_1, x_2)$. Determinare gli angoli e i centri delle rotazioni $R_1 = R_{Q,\varphi} \circ R_{P,\theta}$ e $R_2 = R_{P,\theta} \circ R_{Q,\varphi}$.