

Esercitazione di Geometria 2 (GE210), a. a. 2013/14
Corso di Laurea in Matematica
Università degli studi Roma Tre

Foglio n° 7
CONICHE

Esercizio 1. Sia il piano euclideo \mathbb{E}^2 con riferimento cartesiano ortonormale $RC(O, e_1, e_2)$. Per ognuna delle seguenti coniche

$$\begin{aligned} (1) \quad x^2 + 3xy + 2y^2 + x + 2y &= 0; & (2) \quad x^2 - 3xy + 5y^2 - 2x + 6 &= 0; \\ (3) \quad x^2 + 2xy + y^2 + 4x &= 0; & (4) \quad 3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8 &= 0; \\ (5) \quad -2x^2 + y^2 + 3x - 4y + 1 &= 0; & (6) \quad 3x^2 - 5xy - 2y^2 - x + 9y - 4 &= 0. \end{aligned}$$

- (i) dire se è degenerare o meno;
- (ii) stabilire il tipo di conica;
- (iii) determinare la forma canonica euclidea e l'isometria che la riduce in tale forma;
- (iv) determinare il centro (se lo ammette) e gli assi di simmetria;
- (v) studiare i punti impropri, considerare la conica + i punti impropri in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e determinare la forma canonica della conica proiettiva risultante.

Esercizio 2. Nello spazio \mathbb{E}^2 con riferimento cartesiano ortonormale $RC(O, e_1, e_2)$, si consideri il fascio di coniche

$$\gamma_k : x^2 + (1 - k)y^2 + 2kx - 2(1 - k)y + 2 - k = 0$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$. Determinare i valori di k per cui:

- (i) γ_k è una parabola;
- (ii) γ_k è una iperbole;
- (iii) γ_k è una ellisse con punti reali;
- (iv) γ_k è una circonferenza;
- (v) γ_k è una conica degenerare;
- (vi) γ_k è una ellisse senza punti reali.

Esercizio 3. Data la conica $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x - 3y = 0$ in \mathbb{A}^2 . Si considerino le tre rette di equazione

$$r_1 : x - y + 1 = 0 \quad r_2 : 2x - 3y = 0, \quad r_3 : 3x + y - 4 = 0$$

- (1) Determinare la posizione reciproca di \mathcal{C} con r_1, r_2 e r_3 .
- (2) Determinare i punti impropri di \mathcal{C} .
- (3) Considerare la conica $\bar{\mathcal{C}}$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ data da $\mathcal{C} \cup \{\text{punti impropri}\}$ e determinare la forma canonica proiettiva di $\bar{\mathcal{C}}$.
- (4) Definiamo le coniche affini $\mathcal{C}_i := \bar{\mathcal{C}} \cap (\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) - r_i)$. (Sono coniche affini perché $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) - r_i \cong \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$). Determinare la forma canonica affine di \mathcal{C}_i per ogni $i = 1, 2, 3$.

Esercizio 4. Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale $RC(O, e_1, e_2)$ sia data la conica \mathcal{C} di equazione

$$7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 + 32\sqrt{3}x = 0.$$

Calcolare le equazioni di una rototraslazione che riduce \mathcal{C} in forma canonica.