Corso di Geometria 2 (GE210), Prof. Alessandro Verra

II Prova scritta di esonero del 7/01/2014

Nello svolgimento degli esercizi si chiede di dare indicazione del procedimento applicato e di motivare ogni singola risposta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.

Tempo a disposizione: 3 ore.

Esercizio 1. Si consideri il piano reale euclideo $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ con il riferimento ortonormale standard $RC(O, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$ e sia data la retta r di equazione $x_1 - 3x_2 + 1 = 0$.

(i) Determinare le equazioni della riflessione S_r rispetto alla retta r.

(ii) Dato il vettore $v = (2, 4)$ e la traslazione T_v di vettore v (vale a dire l'isometria $T_v(x_1, x_2) = (x_1 + 2, x_2 + 4)$), si consideri la nuova applicazione $G := T_v \circ S_r$. Dimostrare che G è una isometria inversa senza punti fissi (vale a dire, una glissoriflessione).

(iii) Determinare le equazioni della retta $s \subset \mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ e il vettore w parallelo a s tali che $G = T_w \circ S_s$.

Esercizio 2. Sia lo spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ con riferimento cartesiano ortonormale $RC(O, \overline{\imath}, \overline{\jmath}, \overline{k})$. Siano assegnate le rette

$$r : \begin{cases} x - y + z + 5 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases} \qquad e \qquad r' : \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

(i) Verificare che r ed r' sono sghembe.

(ii) Determinare la retta s incidente e perpendicolare a r e r'.

(iii) Determinare la distanza tra r ed r'.

Esercizio 3. Nel piano $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ con riferimento cartesiano ortonormale $RC(\overline{\imath}, \overline{\jmath})$, si consideri il fascio di coniche

$$\gamma_k : x^2 + (k - 2)xy + y^2 - 4 = 0$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$. Determinare i valori di k per cui:

(i) γ_k è una ellisse con punti reali;

(ii) γ_k è una parabola;

(iii) γ_k è una iperbole;

(iv) γ_k è una circonferenza;

(v) γ_k è una conica degenere.

Esercizio 4. Nel precedente piano $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$, con riferimento cartesiano ortonormale $RC(O, \overline{\imath}, \overline{\jmath})$, si consideri il fascio di coniche dell'esercizio precedente e la forma quadratica q_k definita dalla parte omogenea di grado 2 dell'equazione di γ_k:

(i) si determini una base ortonormale $(\overline{u}_1, \overline{u}_2)$ che sia anche diagonalizzante per la forma quadratica q_k;

(ii) al variare di k si determinino le coordinate del centro C_k della conica γ_k (quando esiste);

(iii) si passi al piano proiettivo che completa all'infinito il piano euclideo $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$, si scriva l'equazione di γ_k in coordinate proiettive e si dica, motivando la risposta, per quali valori di k la conica γ_k ha un solo punto all'infinito;

(iv) per ciascuno di tali k, si determini il fascio di rette parallele del piano euclideo rappresentato dal punto all'infinito di γ_k.