Corso di Geometria 2 (GE210), Prof. Alessandro Verra

Prova scritta del 17/01/2014

Nello svolgimento degli esercizi si chiede di dare indicazione del procedimento applicato e di motivare ogni singola risposta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.

Tempo a disposizione: 3 ore.

Per coloro che vogliono migliorare il voto dell'esonero il tempo è di 2 ore.

Esercizio 1. Sia lo spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$ e sia $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base standard. Sia assegnata la forma quadratica $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$q(v) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3$$

dove $v = (x_1, x_2, x_3)$.

(i) Determinare la forma bilineare simmetrica $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ polare di q e scrivere la matrice associata a f.

(ii) Determinare una base opportuna rispetto alla quale l'espressione di q sia canonica e scrivere tale espressione.

(iii) Determinare la segnatura di q e dedurne il tipo di q.

Esercizio 2. Sia lo spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$ e sia $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base standard. Sia assegnata la forma bilineare $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(v, w) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3x_4 + x_4y_3 + 2x_4y_4.$$

dove $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $w = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.

(i) Dimostrare che f è simmetrica.

(ii) Si denoti con q la forma quadratica associata a f. Verificare, senza diagonalizzare q, che f definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$.

(iii) Di denoti con $\langle v, w \rangle := f(v, w)$. Calcolare gli angoli convessi tra i vettori della base standard $\mathcal{B}$ rispetto a $\langle , \rangle$.

(iv) Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ di V applicando il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla base standard $\mathcal{B}$.

(v) Posto $W = \mathrm{Span}\,(u_2, u_3)$, determinare le equazioni $Z = AX$ di $P_W : \mathbb{R}^4 \to W$, la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^4$ su W, dove $X = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$ sono le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ e $Z = {}^t(z_2, z_3)$ sono le coordinate di W rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

Esercizio 3. Sia lo spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$, dove $\langle , \rangle$ è il prodotto scalare standard. Sia l'operatore lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$F(v) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, x_1 - \frac{1}{2}\, x_2 + \frac{1}{2}\, x_3, \frac{1}{2}\, x_1 + \frac{2+\sqrt{2}}{4}\, x_2 + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\, x_3, -\frac{1}{2}\, x_1 + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\, x_2 + \frac{2+\sqrt{2}}{4}\, x_3 \right),$$

dove $v = (x_1, x_2, x_3)$.

(i) Verificare che F è una rotazione.

(ii) Determinare l'asse vettoriale W della rotazione.

(iii) Determinare l'angolo convesso θ di rotazione.

Esercizio 4. Sia il piano euclideo $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ con riferimento cartesiano ortonormale $RC(O, i, j)$ e sia assegnata la conica $\mathcal{C}$

$$x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 + 6x + 4 = 0.$$

(i) Stabilire il tipo di conica.

(ii) Determinare un riferimento cartesiano rispetto al quale $\mathcal{C}$ abbia equazione canonica euclidea e scrivere l'equazione.

(iii) Determinare il tipo di isometria (traslazione, rotazione, riflessione o glissoriflessione) che riduce $\mathcal{C}$ in forma canonica.

(iv) Si passi al piano proiettivo che completa all'infinito il piano euclideo $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$, si scriva l'equazione di $\mathcal{C}$ in coordinate proiettive e si dica, motivando la risposta, quanti punti all'infinito ammette $\mathcal{C}$. Si determini inoltre il fascio di rette parallele del piano euclideo rappresentato da ciascun punto all'infinito.