Corso di Geometria 2 (GE210), Prof. Alessandro Verra

Prova scritta del 3/02/2014

Nello svolgimento degli esercizi si chiede di dare indicazione del procedimento applicato e di motivare ogni singola risposta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.

Tempo a disposizione: 3 ore.

Esercizio 1. Sia lo spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard $\langle , \rangle$. Sia l'applicazione lineare $F : V \to V$ definita da

$$F(v) = \langle v, e_1 - e_2 + 2e_3 \rangle (e_1 - e_2 + 2e_3)$$

(i) Verificare che F è un operatore simmetrico.
(ii) Determinare una base ortonormale di autovettori per F.
(iii) Si definisca la forma quadratica $q(v) := \langle v, F(v) \rangle$. Determinare una base opportuna rispetto alla quale q abbia espressione canonica (quella data dal Teorema di Sylvester) e scrivere tale espressione.
(iv) Dedurre la segnatura e il tipo di q.

Esercizio 2. Sia lo spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ con riferimento cartesiano ortonormale $RC(O, i, j, k)$. Siano assegnate le rette

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad e \qquad r' : \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

(i) Verificare che r ed r' sono sghembe.
(ii) Determinare la retta s incidente e perpendicolare a r e r'.
(iii) Determinare la distanza tra r ed r'.

Esercizio 3. Sia il piano euclideo $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ con riferimento cartesiano ortonormale $RC(O, i, j)$ e sia assegnata la famiglia di applicazioni $F_\theta : \mathbb{E}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ definite dalle equazioni

$$x' = (\cos\theta)\, x + (\sin\theta)\, y + 1, \quad y' = (\sin\theta)\, x - (\cos\theta)\, y - \sqrt{3}$$

al variare di $0 \leq \theta < 2\pi$.

(i) Verificare che F_θ è una isometria inversa per ogni θ.
(ii) Determinare per quali valori di θ l'isometria F_θ è una riflessione (risp. glissoriflessione).
(iii) Scegliere un valore di θ per cui F_θ è una riflessione e determinare le equazioni dell'asse di simmetria s.
(iv) Scegliere un valore di θ per cui F_θ è una glissoriflessione e determinare le equazioni della retta $r \subset \mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ e il vettore v parallelo a r tali che $F_\theta = T_v \circ S_r$. (Nota: T_v è la traslazione di vettore v e S_r è la riflessione rispetto alla retta r).

Esercizio 4. Sia il piano euclideo $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ con riferimento cartesiano ortonormale $RC(O, i, j)$ e sia assegnata la conica

$$\mathcal{C} : 5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2 + 8x - 8\sqrt{3}y - 8 = 0.$$

(i) Stabilire il tipo di conica.
(ii) Determinare un riferimento cartesiano rispetto al quale $\mathcal{C}$ abbia equazione canonica euclidea e scrivere l'equazione.

(iii) Si passi al piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che completa all'infinito il piano euclideo $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ e si considerino le coordinate proiettive (X, Y, Z) tali che

$$x = \frac{X}{Z} \quad \text{e} \quad y = \frac{Y}{Z}$$

per $Z \neq 0$. Si scriva l'equazione di $\mathcal{C}$ in coordinate proiettive e si dica, motivando la risposta, quanti punti all'infinito ammette $\mathcal{C}$. (Si denoti con $\overline{\mathcal{C}}$ la conica proiettiva data dall'unione di $\mathcal{C}$ con i suoi punti all'infinito).

(iv) Si consideri la retta proiettiva $r : Y = 0$, il nuovo piano affine $\mathbb{A}^2 := \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) - r$ e la conica affine $\mathcal{C}' = \overline{\mathcal{C}} \cap \mathbb{A}^2$. Determinare il tipo di $\mathcal{C}'$.