PROVA SCRITTA DI GE210, APPELLO DEL 5 SETTEMBRE 2014

1) Sia q la forma quadratica su $\mathbf{R}^4$ definita, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) Trovare una base di $\mathbf{R}^4$ che sia diagonalizzante per q.
(2) Calcolare rango e segnatura di q.
(3) Tra tutti i sottospazi W di $\mathbf{R}^4$ per i quali q/W un prodotto scalare determinarne uno la cui dimensione la massima possibile.

2) Sia $\mathbf{R}^4$ lo spazio vettoriale euclideo munito del prodotto scalare standard. Si consideri l'operatore simmetrico F la cui matrice associata rispetto alla base canonica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando il procedimento di Gram-Schmid si costruisca una base ortogonale per il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dalle colonne di A. Si risponda, in modo motivato, alla seguente domanda: esiste una base ortogonale di autovettori di F?

3) Si determinino i punti all' infinito della conica del piano proiettivo reale di equazione $3x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 = x_0^2$. Ponendo $X = x_1/x_0$ e $Y = x_2/x_0$ si passi in coordinate affini e si determini il tipo della conica e gli assi di simmetria. Si consideri poi il fascio di coniche

$$t(x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 - x_0^2) + (x_1^2 - x_0^2) = 0.$$

Si determinino gli eventuali punti del piano proiettivo giacenti su tutte le coniche del fascio e le coniche degeneri del fascio. Passando in coordinate affini si determini il luogo dei centri delle coniche del fascio.