Note del corso[1] *di*

GE5 - Elementi di topologia algebrica e differenziale

A.A. 2009-2010

A.F. Lopez

[1] 9 giugno 2010

Indice

CAPITOLO 1

Introduzione

PREREQUISITI: GE3
obiettivi idea di rivestimento (esp.), omologia ecc.

CAPITOLO 2

Teoria dei Rivestimenti

1. Rivestimenti e gruppo fondamentale

1.1. Definizione e prime proprietà.

DEFINIZIONE 1.1. *Siano R ed X due spazi topologici. Un'applicazione $p : R \to X$ si dice un* **rivestimento** *se p è continua suriettiva e per ogni $x \in X$ esiste un aperto U di X tale che $x \in U$ ed esiste una famiglia $\{V_j\}_{j\in J}$ di aperti di R tali che*

(i) $p^{-1}(U) = \coprod_{j\in J} V_j$, *e*

(ii) $p_{|V_j} : V_j \to U$ *è un omeomorfismo per ogni $j \in J$.*

L'aperto U si dice **aperto ben ricoperto da** *p.*

ESEMPI 1.2.
(a) L'identità $Id_X : X \to X$ è un rivestimento per ogni spazio topologico X.
(b) Un omeomorfismo $f : Y \to X$ tra due spazi topologici è un rivestimento.
(c) Sia $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ la circonferenza con la topologia Euclidea. L'applicazione esponenziale $exp : \mathbb{R} \to S^1$ definita da $exp(t) = e^{2\pi it}$, dove $\mathbb{R}$ ha la topologia Euclidea, è un rivestimento (come visto nel corso di GE3).
(d) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'applicazione $p_n : S^1 \to S^1$ definita da $p_n(z) = z^n$ è un rivestimento.
(e) Sia $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sfera con la topologia Euclidea. Sia ρ la relazione di equivalenza antipodale, cioè, se $v, w \in S^2$, poniamo $v \ \rho \ w \iff v = w$ o $v = -w$,. Come è noto il quoziente S^2/ρ è omeomorfo al piano proiettivo $\mathbb{RP}^2$. L'applicazione quoziente $p : S^2 \to \mathbb{RP}^2$ è un rivestimento.
(f) Dato un rivestimento, molti esempi di rivestimento si ottengono usando il Lemma 1.3(i).

Un ruolo importante, nella topologia di un rivestimento $p : R \to X$, è giocato dalle sue fibre $p^{-1}(x)$. Un primo saggio di ciò è fornito del seguente

LEMMA 1.3. *Sia $p : R \to X$ un rivestimento. Allora*

(i) *Se Y è un sottospazio di X, allora $p_{|p^{-1}(Y)} : p^{-1}(Y) \to Y$ è ancora un rivestimento.*
(ii) *Per ogni $x \in X$ la topologia di R induce la topologia discreta sulla fibra $p^{-1}(x)$.*
(iii) *Se X è connesso tutte le fibre $p^{-1}(x)$ hanno la stessa cardinalità.*
(iv) *p è aperta ed X ha la topologia quoziente rispetto a p.*

Dim. (i) La dimostrazione è lasciata al lettore per esercizio.
Prima di dimostrare le (ii) ed (iii) osserviamo che se $x \in X, U$ è un aperto ben ricoperto contenente x e $r \in p^{-1}(x)$ allora $p^{-1}(x) \subseteq p^{-1}(U) = \coprod_{j\in J} V_j$. Quindi esiste un unico $j_r \in J$ tale che $r \in V_{j_r}$.
(ii) Siano $x \in X$ ed $r \in p^{-1}(x)$. Allora $V_{j_r} \cap p^{-1}(x) = \{r\}$: se $r' \in V_{j_r} \cap p^{-1}(x)$ allora $p_{|V_{j_r}}(r') = p(r') = x = p(r) = p_{|V_{j_r}}(r)$ e l'iniettività di $p_{|V_{j_r}}$ implica che $r' = r$. Allora per

ogni $r \in p^{-1}(x)$ si ha che $\{r\}$ è aperto in $p^{-1}(x)$, quindi la topologia di R induce la topologia discreta su $p^{-1}(x)$.
(iii) Fissato $x_0 \in X$ sia

$$Y = \{x \in X : p^{-1}(x) \text{ ha la stessa cardinalità di } p^{-1}(x_0)\}.$$

Ovviamente $x_0 \in Y$, quindi $Y \neq \emptyset$. Mostreremo che Y è aperto e chiuso. Dato che X è connesso ciò implicherà che $Y = X$, cioè la (iii). Sia U un aperto ben ricoperto e sia $x \in U$. Allora $p^{-1}(U) = \coprod_{j \in J} V_j$ ed asseriamo che c'è una biiezione $\phi : p^{-1}(x) \to J$: definendo $\phi(r) = j_r$ come sopra si ha che, preso $j \in J$ ed $r = p_{|V_j}^{-1}(x) \in V_j$, ne segue che $\phi(r) = j$, cioè ϕ è suriettiva. Se $r, r' \in p^{-1}(x)$ sono tali che $\phi(r) = \phi(r') = j_r$ allora $r' \in V_{j_r} \cap p^{-1}(x) = \{r\}$, quindi $r' = r$ e ϕ è iniettiva. Quindi, per ogni $x \in U$, si ha che $p^{-1}(x)$ ha la stessa cardinalità di J.
Ora mostriamo che Y è aperto: sia $x \in Y$ e sia U un aperto ben ricoperto contenente x. Dato che $x \in Y$ si ha che $p^{-1}(x_0)$ ha la stessa cardinalità di $p^{-1}(x)$ che, per la biiezione ϕ, ha la stessa cardinalità di J, dato che $x \in U$. Ma allora $U \subseteq Y$: se $u \in U$ è evidente che $p^{-1}(u) = \{p_{|V_j}^{-1}(u), j \in J\}$ ha la stessa cardinalità di J e quindi $u \in Y$. Ma U è aperto e $x \in U \subseteq Y$; dato che ciò vale per ogni $x \in Y$ ne segue che Y è aperto. Inoltre Y è chiuso: se $x \in \overline{Y}$ e U è un aperto ben ricoperto contenente x, abbiamo ancora che $p^{-1}(x)$ ha la stessa cardinalità di J. Inoltre $U \cap Y \neq \emptyset$. Preso $u \in U \cap Y$ allora $p^{-1}(u)$ ha la stessa cardinalità di J e $u \in Y$, quindi $p^{-1}(u)$ ha la stessa cardinalità di $p^{-1}(x_0)$. Allora $p^{-1}(x)$ ha la stessa cardinalità di $p^{-1}(x_0)$, cioè $x \in Y$. Allora Y è chiuso.
(iv) Sia $A \subseteq R$ un aperto e sia $x \in p(A)$. Sia U un aperto ben ricoperto contenente x e sia $r \in A$ tale che $x = p(r)$. Come sopra esiste un unico $j_r \in J$ tale che $r \in V_{j_r}$. Allora $r \in A \cap V_{j_r}$ da cui $x = p(r) \in p_{|V_{j_r}}(A \cap V_{j_r}) \subseteq p(A)$ e $p_{|V_{j_r}}(A \cap V_{j_r})$ è aperto in U (e quindi in X) dato che $p_{|V_{j_r}}$ è un omeomorfismo. Allora $p(A)$ è intorno di ogni suo punto, dunque aperto. Infine mostriamo che $A' \subseteq X$ è aperto se e solo se $p^{-1}(A')$ è aperto in R. Dato che p è continua ne segue chiaramente che $p^{-1}(A')$ è aperto in R se $A' \subseteq X$ è aperto. Viceversa se $p^{-1}(A')$ è aperto in R allora $A' = p(p^{-1}(A'))$ (p è suriettiva!) è aperto in X dato che p è aperta. ∎

Esercizio 1.4.
Un rivestimento iniettivo è un omeomorfismo.

1.2. Sollevamento di applicazioni continue.

Definizione 1.5. *Siano $p : R \to X$ un rivestimento, Y uno spazio topologico ed $f : Y \to X$ un'applicazione continua. Un* **sollevamento di f ad** *R è un'applicazione continua $\widetilde{f} : Y \to R$ tale che $f = p \circ \widetilde{f}$.*

Come vedremo in seguito, non è in generale detto che un sollevamento esista. D'altro canto, se Y è connesso e fissiamo l'immagine di un punto, allora, il sollevamento, se esiste, è unico.

Teorema 1.6 (Teorema di unicità del sollevamento). *Siano $p : R \to X$ un rivestimento, Y uno spazio topologico connesso ed $f : Y \to X$ un'applicazione continua. Siano $x_0 \in X, y_0 \in Y$ e $r_0 \in R$ tali che $f(y_0) = x_0 = p(r_0)$. Se $\widetilde{f} : Y \to R$ e $g : Y \to R$ sono due sollevamenti di f tali che $\widetilde{f}(y_0) = g(y_0)$, allora $\widetilde{f} = g$.*

Dim. Sia $A = \{y \in Y : \widetilde{f}(y) = g(y)\}$, quindi $y_0 \in A$. Mostreremo che A è aperto e chiuso. Dato che Y è connesso ciò implicherà che $A = Y$, cioè $\widetilde{f} = g$.
Per mostrare che A è aperto sia $y \in A$ e sia U un aperto ben ricoperto contenente $f(y)$. Allora $p(\widetilde{f}(y)) = f(y) \in U$ quindi $\widetilde{f}(y) = g(y) \in p^{-1}(U) = \coprod_{j\in J} V_j$ ed esiste $j_0 \in J$ tale che $\widetilde{f}(y) = g(y) \in V_{j_0}$. Posto $V = V_{j_0}$ si ha $y \in \widetilde{f}^{-1}(V) \cap g^{-1}(V)$. Dato che $\widetilde{f}$ e g sono continue, ne segue che $\widetilde{f}^{-1}(V) \cap g^{-1}(V)$ è aperto in Y. Allora, per far vedere che A è aperto sarà sufficente mostrare che $\widetilde{f}^{-1}(V) \cap g^{-1}(V) \subseteq A$, in quanto A sarà intorno di ogni suo punto, quindi aperto. Sia ora $z \in \widetilde{f}^{-1}(V) \cap g^{-1}(V)$, quindi $\widetilde{f}(z) \in V, g(z) \in V$. Ma $p_{|V}(\widetilde{f}(z)) = f(z) = p_{|V}(g(z))$, quindi $\widetilde{f}(z) = g(z)$ per l'iniettività di $p_{|V}$, e dunque $z \in A$.
Per mostrare che A è chiuso sia $y \in Y - A$ e sia U un aperto ben ricoperto contenente $f(y)$. Come prima esiste $j_0 \in J$ tale che $\widetilde{f}(y) \in V_{j_0}$ e $j_1 \in J$ tale che $g(y) \in V_{j_1}$. Inoltre $j_0 \neq j_1$, altrimenti $V_{j_0} = V_{j_1}$ da cui $p_{|V_{j_0}}(\widetilde{f}(y)) = f(y) = p_{|V_{j_1}}(g(z)) = p_{|V_{j_0}}(g(z))$ da cui $\widetilde{f}(y) = g(y)$, contraddicendo il fatto che $y \in Y - A$. Come sopra $y \in \widetilde{f}^{-1}(V_{j_0}) \cap g^{-1}(V_{j_1})$ che è aperto in Y e quindi sarà sufficente mostrare che $\widetilde{f}^{-1}(V_{j_0}) \cap g^{-1}(V_{j_1}) \subseteq Y - A$, in quanto cioò darà che $Y - A$ è aperto. Se $z \in \widetilde{f}^{-1}(V_{j_0}) \cap g^{-1}(V_{j_1})$ si ha $\widetilde{f}(z) \in V_{j_0}, g(z) \in V_{j_1}$ quindi certamente $\widetilde{f}(z) \neq g(z)$ dato che $V_{j_0} \cap V_{j_1} = \emptyset$. Allora $z \in Y - A$. ∎

Ricordiamo ora le definizioni di arco ed omotopia.

Definizione 1.7. *Siano $I = [0,1]$ ed $I \times I$ con la topologia Euclidea e sia X uno spazio topologico. Un* **arco** *in X è un'applicazione continua $\alpha : I \to X$. I punti $\alpha(0), \alpha(1) \in X$ si dicono rispettivamente* **punto iniziale e finale** *dell'arco. Due archi $\alpha : I \to X, \beta : I \to X$ si dicono* **equivalenti** *se esiste un'applicazione continua (detta* **omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra α e β***) $F : I \times I \to X$ tale che $F(s,0) = \alpha(s), F(s,1) = \beta(s)$ per ogni $s \in I$ e $F(0,t), F(1,t)$ sono indipendenti da $t \in I$. Denoteremo tale equivalenza con $\alpha \sim \beta$.*

Per archi ed omotopie esistono i sollevamenti.

Teorema 1.8. *Siano $p : R \to X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ ed $r_0 \in R$ tali che $x_0 = p(r_0)$. Sia $\alpha : I \to X$ un arco tale che $\alpha(0) = x_0$. Allora esiste un unico arco $\widetilde{\alpha}_{r_0} : I \to R$ che è sollevamento di α tale che $\widetilde{\alpha}_{r_0}(0) = r_0$.*

Dim. L'unicità segue dal Teorema di unicità del sollevamento (Teorema 1.6). L'esistenza si dimostra esattamente come nel caso del rivestimento $exp : \mathbb{R} \to S^1$ (vedasi [**S**, Lemma16.1] o [**K**, Teorema16.4]) ed è lasciata al lettore per esercizio. ∎

Teorema 1.9. *Siano $p : R \to X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ ed $r_0 \in R$ tali che $x_0 = p(r_0)$. Siano $\alpha : I \to X$ un arco tale che $\alpha(0) = x_0$ ed $F : I \times I \to X$ un'applicazione continua tale che $F(s,0) = \alpha(s)$. Allora esiste un'unica applicazione continua $\widetilde{F} : I \times I \to R$ tale che $\widetilde{F}(s,0) = \widetilde{\alpha}_{r_0}(s)$ per ogni $s \in I$.*

Dim. L'unicità segue dal Teorema di unicità del sollevamento (Teorema 1.6). L'esistenza si dimostra esattamente come nel caso del rivestimento $exp : \mathbb{R} \to S^1$ (vedasi [**S**, Lemma16.2] o [**K**, Lemma16.5]) ed è lasciata al lettore per esercizio. ∎

Corollario 1.10 (Teorema di Monodromia). *Siano $p : R \to X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ ed $r_0 \in R$ tali che $x_0 = p(r_0)$. Siano $\alpha : I \to X$ e $\beta : I \to X$ due archi tali che $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ ed $\alpha \sim \beta$. Allora $\widetilde{\alpha}_{r_0} \sim \widetilde{\beta}_{r_0}$ ed in particolare $\widetilde{\alpha}_{r_0}(1) = \widetilde{\beta}_{r_0}(1)$.*

Dim. Sia F un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra α e β. Per il Teorema 1.9 esiste un'applicazione continua $\widetilde{F} : I \times I \to R$ tale che $\widetilde{F}(s,0) = \widetilde{\alpha}_{r_0}(s)$ per ogni $s \in I$. Per ogni $t \in I$ si ha, usando il fatto che $F(0,t)$ è indipendente da t,

$$p(\widetilde{F}(0,t)) = F(0,t) = F(0,0) = \alpha(0) = x_0$$

da cui l'arco definito da $\widetilde{F}(0,t)$ è un sollevamento del cappio costante c_{x_0} così come lo è c_{r_0}. Inoltre $\widetilde{F}(0,0) = \widetilde{\alpha}_{r_0}(0) = r_0$ da cui, per l'unicità del sollevamento di archi (Teorema 1.8), si ha che $\widetilde{F}(0,t) = r_0$ ed è quindi indipendente da t. Posto $r_1 = \widetilde{\alpha}_{r_0}(1)$ analogamente si ha

$$p(\widetilde{F}(1,t)) = F(1,t) = F(1,0) = \alpha(1)$$

da cui $\widetilde{F}(1,t)$ è un sollevamento di $c_{\alpha(1)}$ così come lo è c_{r_1}. Inoltre $\widetilde{F}(1,0) = \widetilde{\alpha}_{r_0}(1) = r_1$ quindi, ancora per l'unicità del sollevamento di archi, si ha che $\widetilde{F}(1,t) = r_1$ ed è indipendente da t. Infine, per ogni $s \in I$,

$$p(\widetilde{F}(s,1)) = F(s,1) = \beta(s)$$

il che mostra che $\widetilde{F}(s,1)$ è un sollevamento di β. Dato che $\widetilde{F}(0,1) = r_0 = \widetilde{\beta}_{r_0}(0)$, l'unicità del sollevamento implica che $\widetilde{F}(s,1) = \widetilde{\beta}_{r_0}(s)$. Abbiamo allora mostrato che $\widetilde{F}$ è un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra $\widetilde{\alpha}_{r_0}$ e $\widetilde{\beta}_{r_0}$. Archi equivalenti hanno lo stesso punto finale, da cui $\widetilde{\alpha}_{r_0}(1) = \widetilde{\beta}_{r_0}(1)$. ■

Una conseguenza interessante è la seguente

Corollario 1.11. *Siano $p : R \to X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ ed $r_0 \in R$ tali che $x_0 = p(r_0)$. Allora l'omomorfismo $p_* : \pi_1(R,r_0) \to \pi_1(X,x_0)$ è iniettivo.*

Dim. Sia $[\gamma] \in \pi_1(R,r_0)$ tale che $p_*([\gamma]) = [c_{x_0}]$, cioè $[p \circ \gamma] = [c_{x_0}]$ e quindi $p \circ \gamma \sim c_{x_0}$. Per l'unicità del sollevamento (Teorema 1.8) si ha che $\gamma = \widetilde{(p \circ \gamma)}_{r_0}$, $\widetilde{(c_{x_0})}_{r_0} = c_{r_0}$ e per il Teorema di Monodromia (Corollario 1.10), $\widetilde{(p \circ \gamma)}_{r_0} \sim \widetilde{(c_{x_0})}_{r_0}$. Quindi $[\gamma] = [c_{r_0}]$ e p_* è iniettivo. ■

1.3. Azione del gruppo fondamentale sulle fibre di un rivestimento.

La relazione tra il gruppo fondamentale e le fibre di un rivestimento ha una natura topologico-algebrica. Per evidenziare ciò ricordiamo prima la seguente

Definizione 1.12. *Siano Y un insieme e G un gruppo moltiplicativo. Un'***azione (destra) di** G **su** Y *è un'applicazione $\phi : Y \times G \to Y$ tale che, posto $\phi(y,g) = y.g$, si ha*

(i) *$y.1_G = y$ per ogni $y \in Y$ e*
(ii) *$(y.g).h = y.(gh)$ per ogni $y \in Y$ e per ogni $g,h \in G$ (associatività).*

Lo **stabilizzatore** *di un elemento $y \in Y$ è il sottogruppo $\mathrm{Stab}_y = \{g \in G : y.g = y\}$. L'azione di G su Y si dice* **transitiva** *se per ogni $y, y' \in Y$ esiste $g \in G$ tale che $y' = y.g$.*

Proposizione 1.13. *Sia $p : R \to X$ un rivestimento e $x_0 \in X$. Posto, per ogni $r \in p^{-1}(x_0)$ e per ogni $[\alpha] \in \pi_1(X,x_0)$,*

$$r.[\alpha] = \widetilde{\alpha}_r(1)$$

si ottiene un'azione destra di $\pi_1(X,x_0)$ sulla fibra $p^{-1}(x_0)$. Lo stabilizzatore di $r \in p^{-1}(x_0)$ è $p_*(\pi_1(R,r))$. L'azione è transitiva se R è connesso per archi.

Dim. L'azione è ben definita per il Teorema di Monodromia (Corollario 1.10). Per l'unicità del sollevamento si ha che $r.[c_{x_0}] = \widetilde{(c_{x_0})}_r(1) = c_r(1) = r$. Dati $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ poniamo $r_1 = \widetilde{\alpha}_r(1)$ in modo che $\widetilde{(\alpha * \beta)}_r = \widetilde{\alpha}_r * \widetilde{\beta}_{r_1}$. Ora

$$(r.[\alpha]).[\beta] = \widetilde{\alpha}_r(1).[\beta] = r_1.[\beta] = \widetilde{\beta}_{r_1}(1)$$

e

$$r.([\alpha][\beta]) = r.[\alpha * \beta] = \widetilde{(\alpha * \beta)}_r(1) = (\widetilde{\alpha}_r * \widetilde{\beta}_{r_1})(1) = \widetilde{\beta}_{r_1}(1)$$

coincidono, mostrando che abbiamo definito un'azione destra di $\pi_1(X, x_0)$ su $p^{-1}(x_0)$.
Se $[\alpha] \in \mathrm{Stab}_r$ si ha $r.[\alpha] = r$, allora $\widetilde{\alpha}_r(1) = r$, da cui $\widetilde{\alpha}_r$ è un cappio in R di base r e $[\alpha] = [p \circ \widetilde{\alpha}_r] = p_*([\widetilde{\alpha}_r])$, quindi $[\alpha] \in p_*(\pi_1(R, r))$. Viceversa sia $[\alpha] \in p_*(\pi_1(R, r))$, così che esiste $[\gamma] \in \pi_1(R, r)$ tale che $[\alpha] = p_*([\gamma]) = [p \circ \gamma]$ e quindi $\alpha \sim p \circ \gamma$. Il Teorema di Monodromia (Corollario 1.10) implica che $\widetilde{\alpha}_r(1) = \widetilde{(p \circ \gamma)}_r(1) = \gamma(1) = r$, da cui $r.[\alpha] = r$, cioè $[\alpha] \in \mathrm{Stab}_r$. Questo mostra che $\mathrm{Stab}_r = p_*(\pi_1(R, r))$.
Se R è connesso per archi e $r, r' \in p^{-1}(x_0)$ sia $\gamma : I \to R$ un arco tale che $\gamma(0) = r, \gamma(1) = r'$. Allora $p \circ \gamma$ è un cappio in X di base x_0 e, al solito, $\widetilde{(p \circ \gamma)}_r = \gamma$. Ne segue che $r.[p \circ \gamma] = \widetilde{(p \circ \gamma)}_r(1) = \gamma(1) = r'$, mostrando che l'azione è transitiva. ■

Corollario 1.14. *Sia $p : R \to X$ un rivestimento con R connesso per archi, $x_0 \in X$ ed $r_0 \in R$ tali che $x_0 = p(r_0)$. Allora c'è una corrispondenza biunivoca tra $p^{-1}(x_0)$ e l'insieme delle classi laterali destre di $p_*(\pi_1(R, r_0))$ in $\pi_1(X, x_0)$.*

Dim. Sia $H = p_*(\pi_1(R, r_0))$ ed $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Associando alla classe laterale destra $H[\alpha]$ l'elemento della fibra $r_0.[\alpha]$ si definisce un'applicazione ψ tra l'insieme delle classi laterali destre di H in $\pi_1(X, x_0)$ e $p^{-1}(x_0)$. L'applicazione è infatti ben definita dato che, se $H[\alpha] = H[\beta]$ allora $[\beta][\alpha]^{-1} \in H = \mathrm{Stab}_{r_0}$ per la Proposizione 1.13 e quindi $[\beta] = [\gamma][\alpha]$ per qualche $[\gamma] \in \mathrm{Stab}_{r_0}$. Allora, usando l'associatività dell'azione, $r_0.[\beta] = r_0.[\gamma][\alpha] = r_0.[\alpha]$.
Se $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ sono tali che $r_0.[\alpha] = r_0.[\beta]$ allora $r_0.[\alpha][\beta]^{-1} = r_0.[\beta][\beta]^{-1} = r_0.[c_{x_0}] = r_0$. Quindi $[\alpha][\beta]^{-1} \in \mathrm{Stab}_{r_0} = H$, da cui $H[\alpha] = H[\beta]$, cioè ψ è iniettiva.
Dato che R connesso per archi, la Proposizione 1.13 garantisce che l'azione di $\pi_1(X, x_0)$ su $p^{-1}(x_0)$ è transitiva, quindi ogni elemento $r \in p^{-1}(x_0)$ si può scrivere come $r_0.[\alpha]$ per qualche $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, mostrando che ψ è suriettiva. ■

Corollario 1.15. *Il gruppo fondamentale del piano proiettivo è $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Dim. Come sappiamo (Esempio 1.2(e)) c'è un rivestimento $p : S^2 \to \mathbb{RP}^2$ le cui fibre hanno due elementi. Per il Corollario 1.14, usando il fatto che $\pi_1(S^2) = \{1\}$, si ottiene che c'è una corrispondenza biunivoca tra $p^{-1}(x_0)$ e $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$. Allora $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$ è un gruppo di due elementi, cioè $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. ■

1.4. Esistenza di sollevamenti di applicazioni continue.

Per mostrare l'esistenza di sollevamenti, ed in generale per molti risultati successivi, occorrerà introdurre una nuova condizione topologica.

Definizione 1.16. *Uno spazio topologico X si dice* **localmente connesso per archi** *se ha una base di aperti connessi per archi.*

Tale nozione è in generale distinta dalla connessione per archi, come si può vedere dagli esempi seguenti, la cui dimostrazione è lasciata al lettore per esercizio.

Esempi 1.17.
(a) Uno spazio topologico discreto X con almeno due elementi è localmente connesso per archi ma non connesso per archi.
(b) Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, y = 0\}$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, y = \frac{1}{2} sen(\frac{\pi}{x})\}$ e sia $X = A \cup B \cup C$ con la topologia Euclidea. X è detto il *cerchio polacco*. Allora X è connesso per archi ma non localmente connesso per archi.

La connessione locale per archi ha altre formulazioni equivalenti

Esercizi 1.18.
(a) Per uno spazio topologico X le seguenti condizioni sono equivalenti:
- (a1) X è localmente connesso per archi.
- (a2) Ogni punto $x \in X$ ha un sistema fondamentale di intorni aperti connessi per archi.
- (a3) Ogni punto $x \in X$ ha un sistema fondamentale di intorni connessi per archi.
- (a4) Le componenti connesse per archi degli aperti di X sono aperte.

(b) Sia $p : R \to X$ un rivestimento. Allora R è localmente connesso per archi se e solo se X lo è.

Ora mostriamo il risultato che caratterizza, in termini topologico-algebrici, l'esistenza di sollevamenti.

Teorema 1.19 (Esistenza del sollevamento di applicazioni continue). *Siano $p : R \to X$ un rivestimento, Y uno spazio topologico ed $f : Y \to X$ un'applicazione continua e siano $x_0 \in X, y_0 \in Y$ ed $r_0 \in R$ tali che $f(y_0) = x_0 = p(r_0)$. Se esiste un sollevamento $\widetilde{f}$ di f ad R tale che $\widetilde{f}(y_0) = r_0$, allora $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0))$. Viceversa se Y è connesso per archi e localmente connesso per archi e $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0))$, allora esiste un unico sollevamento $\widetilde{f}$ di f ad R tale che $\widetilde{f}(y_0) = r_0$.*

Dim. Se esiste un sollevamento $\widetilde{f}$ di f ad R tale che $\widetilde{f}(y_0) = r_0$, allora $f_*(\pi_1(Y, y_0)) = (p \circ \widetilde{f})_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_* \circ \widetilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0))$.

Viceversa sia $y \in Y$ e sia $\alpha : I \to Y$ un arco tale che $\alpha(0) = y_0, \alpha(1) = y$. Allora $f \circ \alpha$ è un arco in X di punto iniziale $f(\alpha(0)) = f(y_0) = x_0$, dunque possiamo considerare il sollevamento $\widetilde{(f \circ \alpha)}_{r_0}$ e definire
$$\widetilde{f}(y) = \widetilde{(f \circ \alpha)}_{r_0}(1).$$
Verifichiamo che $\widetilde{f}$ è ben definita: se $\beta : I \to Y$ è un altro arco tale che $\beta(0) = y_0, \beta(1) = y$ allora $\alpha * \beta^o$ è un cappio in Y di base y_0. Dunque $[f \circ (\alpha * \beta^o)] = f_*([\alpha * \beta^o]) \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0)) = \mathrm{Stab}_{r_0}$ per la Proposizione 1.13. Quindi $\widetilde{(f \circ (\alpha * \beta^o))}_{r_0}(1) = r_0$. Sia ora $r_1 = \widetilde{(f \circ \alpha)}_{r_0}(1)$. Al solito $\widetilde{(f \circ (\alpha * \beta^o))}_{r_0} = \widetilde{(f \circ \alpha)}_{r_0} * \widetilde{(f \circ \beta^o)}_{r_1}$ e quindi $r_0 = \widetilde{(f \circ (\alpha * \beta^o))}_{r_0}(1) = \widetilde{(f \circ \beta^o)}_{r_1}(1)$. Ma allora $\widetilde{(f \circ \beta)}_{r_0}(1) = r_1 = \widetilde{(f \circ \alpha)}_{r_0}(1)$ ed $\widetilde{f}$ è ben definita.

È ovvio che $\widetilde{f}$ è un sollevamento di f: $p(\widetilde{f}(y)) = p(\widetilde{(f \circ \alpha)}_{r_0}(1)) = f(\alpha(1)) = f(y)$.

Infine mostriamo che $\widetilde{f}$ è continua. Sia $y \in Y$ e sia $A \subseteq R$ un aperto tale che $\widetilde{f}(y) \in A$. Allora, intersecando con A, possiamo trovare un aperto $V \subseteq A$ tale che $\widetilde{f}(y) \in V$ e $p_{|V} : V \to p(V)$ è un omeomorfismo. Ora $U = p(V)$ è un aperto di X e $f(y) = p(\widetilde{f}(y)) \in U$ quindi $y \in f^{-1}(U)$. Per ipotesi esiste un aperto W connesso per archi tale che $y \in W \subseteq f^{-1}(U)$. Mostreremo che $\widetilde{f}(W) \subseteq V$. Ciò implicherà che $\widetilde{f}(W) \subseteq A$ e quindi che $\widetilde{f}$ è continua in y. Sia allora $z \in W$ e sia $\beta : I \to W$ un arco tale che $\beta(0) = y, \beta(1) = z$, così che possiamo usare $\alpha * \beta$ per calcolare $\widetilde{f}(z)$. Si ha $\widetilde{f}(z) = \widetilde{(f \circ (\alpha * \beta))}_{r_0}(1) = \widetilde{(f \circ \beta)}_{r_1}(1)$. Per ogni $s \in I$ si ha $\beta(s) \in W$, da cui $p(\widetilde{(f \circ \beta)}_{r_1}(s)) = f(\beta(s)) \in U$ e quindi $\widetilde{(f \circ \beta)}_{r_1}(s) \in p^{-1}(U) = \coprod_{j \in J} V_j$. Ma $\widetilde{(f \circ \beta)}_{r_1}(0) = r_1 = \widetilde{f}(y) \in V$, quindi, per connessione ed usando il fatto che $V = V_j$ per qualche $j \in J$, si ha che tutto l'arco $\widetilde{(f \circ \beta)}_{r_1}$ è contenuto in V e perciò $\widetilde{f}(z) = \widetilde{(f \circ \beta)}_{r_1}(1) \in V$. Questo mostra che $\widetilde{f}(W) \subseteq V$. Infine l'unicità segue dal Teorema di unicità del sollevamento (Teorema 1.6). ■

Una conseguenza importante del teorema precedente è che un rivestimento (puntato) è caratterizzato dal sottogruppo che definisce.

Corollario 1.20. *Siano $p : R \to X$ e $q : T \to X$ due rivestimenti e siano $r_0 \in R, t_0 \in T$ e $x_0 \in X$ tali che $p(r_0) = x_0 = q(t_0)$. Se esiste un omeomorfismo $\phi : R \to T$ tale che $q \circ \phi = p$ e $\phi(r_0) = t_0$ allora $p_*(\pi_1(R, r_0)) = q_*(\pi_1(T, t_0))$. Viceversa se $p_*(\pi_1(R, r_0)) = q_*(\pi_1(T, t_0))$ ed R e T sono connessi per archi e localmente connessi per archi allora esiste un unico omeomorfismo $\phi : R \to T$ tale che $q \circ \phi = p$ e $\phi(r_0) = t_0$.*

Dim. Se esiste un omeomorfismo $\phi : R \to T$ tale che $q \circ \phi = p$ e $\phi(r_0) = t_0$ allora $\phi_*(\pi_1(R, r_0)) = \pi_1(T, t_0)$, quindi $p_*(\pi_1(R, r_0)) = (q \circ \phi)_*(\pi_1(R, r_0)) = q_* \circ \phi_*(\pi_1(R, r_0)) = q_*(\pi_1(T, t_0))$.
Viceversa supponiamo che $p_*(\pi_1(R, r_0)) = q_*(\pi_1(T, t_0))$. Per il Teorema di esistenza del sollevamento (Teorema 1.19) c'è un sollevamento $\widetilde{p}$ di p a T (cioè $q \circ \widetilde{p} = p$) tale che $\widetilde{p}(r_0) = t_0$ (unico per il Teorema di unicità del sollevamento (Teorema 1.6)) ed un sollevamento $\widetilde{q}$ di q ad R (cioè $p \circ \widetilde{q} = q$) tale che $\widetilde{q}(t_0) = r_0$. Ora

$$q \circ (\widetilde{p} \circ \widetilde{q}) = p \circ \widetilde{q} = q$$

e quindi $\widetilde{p} \circ \widetilde{q}$ ed ovviamente Id_T sono due sollevamenti di q a T. Inoltre $\widetilde{p} \circ \widetilde{q}(t_0) = \widetilde{p}(r_0) = t_0 = Id_T(t_0)$. Il Teorema di unicità del sollevamento (Teorema 1.6) implica che $\widetilde{p} \circ \widetilde{q} = Id_T$. Analogamente si dimostra che $\widetilde{q} \circ \widetilde{p} = Id_R$ e non resta che porre $\phi = \widetilde{p}$. ■

2. Il rivestimento universale

Nel caso di S^1 l'esistenza del rivestimento $exp : \mathbb{R} \to S^1$ è stata decisiva nel calcolo del gruppo fondamentale. Uno dei punti chiave è stato che il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}$ è banale. È pertanto evidente che, dato uno spazio topologico X, la conoscenza di un rivestimento con gruppo fondamentale banale, potrà permettere, in molti casi, di calcolare il gruppo fondamentale di X. Introduciamo pertanto la seguente

Definizione 2.1. *Uno spazio topologico Y si dice* **semplicemente connesso** *se Y è connesso per archi e $\pi_1(Y) = \{1\}$. Sia X uno spazio topologico connesso per archi e localmente* *connesso per archi. Un rivestimento $p : R \to X$ si dice* **universale** *se R è semplicemente connesso.*

Esempi 2.2.
(a) Il rivestimento $exp : \mathbb{R} \to S^1$ nell'Esempio 1.2(c) è universale.
(b) Il rivestimento $S^2 \to \mathbb{RP}^2$ nell'Esempio 1.2(e) è universale.

Osservazione 2.3.
Se $p : R \to X$ è un rivestimento universale allora R è localmente connesso per archi.
Infatti X lo è per definizione di rivestimento universale e quindi anche R lo è (Esercizio 1.18(b)).

2.1. Unicità del rivestimento universale.

Il rivestimento universale è unico a meno di omeomorfismi (puntati):

Corollario 2.4. *(i) Sia $p : R \to X$ un rivestimento, sia Y uno spazio topologico semplicemente connesso e localmente connesso per archi, sia $f : Y \to X$ un'applicazione continua e siano $x_0 \in X, y_0 \in Y$ ed $r_0 \in R$ tali che $f(y_0) = x_0 = p(r_0)$. Allora esiste un unico sollevamento $\widetilde{f}$ di f ad R tale che $\widetilde{f}(y_0) = r_0$.*
(ii) Siano $p : R \to X$ e $q : T \to X$ due rivestimenti universali e siano $r_0 \in R, t_0 \in T$ e $x_0 \in X$ tali che $p(r_0) = x_0 = q(t_0)$. Allora esiste un unico omeomorfismo $\phi : R \to T$ tale che $q \circ \phi = p$ e $\phi(r_0) = t_0$.

Dim. La (i) segue immediatamente dal Teorema di esistenza del sollevamento (Teorema 1.19) dato che $f_*(\pi_1(Y, y_0)) = \{[c_{x_0}]\} \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0))$. La (ii) segue immediatamente dal Corollario 1.20. ∎

Un'altra proprietà del rivestimento universale di uno spazio topologico X, che ne giustifica il nome, è che *riveste ogni rivestimento di X*. Per vedere questo introdurremo un lemma che mette in luce le proprietà delle trasformazioni di rivestimento.

Lemma 2.5. *Sia X uno spazio topologico localmente connesso per archi, siano $p : R \to X$ e $q : T \to X$ due rivestimenti con T connesso per archi e sia $\phi : R \to T$ un'applicazione continua tale che $q \circ \phi = p$. Allora ϕ è un rivestimento.*

Dim. Mostriamo prima che ϕ è suriettiva. Sia $t \in T$ e siano $r_0 \in R$, $t_0 = \phi(r_0)$ e $x_0 = p(r_0) = q(t_0)$. Sia $\gamma : I \to T$ un arco tale che $\gamma(0) = t_0, \gamma(1) = t$, in modo che $\alpha = q \circ \gamma$ è un arco in X che ha per punto iniziale x_0. Consideriamo il sollevamento $\widetilde{\alpha}_{r_0}$ di α ad R e l'arco $\phi \circ \widetilde{\alpha}_{r_0}$. Si ha $q \circ (\phi \circ \widetilde{\alpha}_{r_0}) = p \circ \widetilde{\alpha}_{r_0} = \alpha$ e $(\phi \circ \widetilde{\alpha}_{r_0})(0) = \phi(r_0) = t_0$, da cui, per l'unicità del sollevamento di archi (Teorema 1.8) otteniamo che $\phi \circ \widetilde{\alpha}_{r_0} = \gamma$ e quindi $\phi(\widetilde{\alpha}_{r_0}(1)) = \gamma(1) = t$, che da la suriettività di ϕ.
Siano ora $t \in T, x = q(t) \in X$ e siano U_p un aperto ben ricoperto da p contenente x ed U_q un aperto ben ricoperto da q contenente x. Sia V un aperto connesso per archi tale che $x \in V \subseteq U_p \cap U_q$. Sia $\{A_k\}_{k \in K}$ la famiglia di aperti di T tali che $q^{-1}(U_q) = \coprod_{k \in K} A_k$ e $q_{|A_k} : A_k \to U_q$ è un omeomorfismo per ogni $k \in K$. Posto $B_k = q^{-1}(V) \cap A_k$ osserviamo intanto che $q_{|B_k} : B_k \to V$ è un omeomorfismo: per definizione si ha $q(B_k) \subseteq V$ e se $v \in V$ allora $v \in U_q$, $q^{-1}_{|A_k}(v) \in q^{-1}(V) \cap A_k = B_k$ e $v = q(q^{-1}_{|A_k}(v)) \in q(B_k)$; allora anche $V \subseteq q(B_k)$ e quindi $V = q(B_k)$. Ora $q_{|B_k}$ non è altro che la restrizione a B_k dell'omeomorfismo $q_{|A_k}$ e quindi anche $q_{|B_k}$ è un omeomorfismo per ogni $k \in K$.

Dato che $q(t) = x \in V$ si ha $t \in q^{-1}(V) \subseteq q^{-1}(U_q) = \coprod_{k\in K} A_k$, quindi esiste un unico $k_0 \in K$ tale che $t \in A_{k_0}$. Sia $U = B_{k_0} = q^{-1}(V) \cap A_{k_0}$. Allora $t \in U$ e mostreremo che U è ben ricoperto da ϕ.
Se $\{W_j\}_{j\in J}$ è la famiglia di aperti di R tali che $p^{-1}(U_p) = \coprod_{j\in J} W_j$ e $p_{|W_j} : W_j \to U_p$ è un omeomorfismo per ogni $j \in J$ allora, come sopra, posto $V_j = p^{-1}(V) \cap W_j$, si ha che $p_{|V_j} : V_j \to V$ è un omeomorfismo. Sia $J' = \{j \in J : V_j \cap \phi^{-1}(U) \neq \emptyset\}$. Facciamo vedere ora che

$$\phi^{-1}(U) = \coprod_{j\in J'} V_j.$$

Se $r \in \phi^{-1}(U)$ allora $\phi(r) \in U$ e quindi $p(r) = q(\phi(r)) \in q(U) = V$, da cui $r \in p^{-1}(V)$. Ma $p^{-1}(V) \subseteq p^{-1}(U_p) = \coprod_{j\in J} W_j$, da cui $p^{-1}(V) = (\coprod_{j\in J} W_j) \cap p^{-1}(V) = \coprod_{j\in J}(W_j \cap p^{-1}(V)) = \coprod_{j\in J} V_j$. Pertanto esiste $j \in J$ tale che $r \in V_j$. Ma $r \in \phi^{-1}(U)$, da cui $r \in \phi^{-1}(U) \cap V_j$ e quindi $j \in J'$. Allora $r \in \coprod_{j\in J'} V_j$ e questo mostra che $\phi^{-1}(U) \subseteq \coprod_{j\in J'} V_j$. Invece se $r \in V_j = p^{-1}(V) \cap W_j$ per qualche $j \in J'$ allora $q(\phi(r)) = p(r) \in V$ e quindi $\phi(r) \in q^{-1}(V)$. Dato che $j \in J'$ esiste $r_0 \in V_j \cap \phi^{-1}(U)$, da cui $p(r_0) \in V$ e $\phi(r_0) \in U$. Dato che V_j è omeomorfo a V si ha che V_j è connesso per archi e quindi possiamo trovare un arco $\beta : I \to V_j$ tale che $\beta(0) = r_0, \beta(1) = r$. Sia $\gamma = \phi \circ \beta$. Per ogni $s \in I$ abbiamo $\beta(s) \in V_j$, quindi $q(\gamma(s)) = q(\phi(\beta(s))) = p(\beta(s)) \in V$. Allora $\gamma(s) \in q^{-1}(V) \subseteq q^{-1}(U_q) = \coprod_{k\in K} A_k$ per ogni $s \in I$. Ciò mostra che $\gamma(I) \subseteq \coprod_{k\in K} A_k$. Ma $\gamma(I)$ è connesso e $\gamma(0) = \phi(\beta(0)) = \phi(r_0) \in U \subseteq A_{k_0}$, pertanto $\gamma(I) \subseteq A_{k_0}$. Ne segue che $\gamma(I) \subseteq q^{-1}(V) \cap A_{k_0} = U$ ed in particolare $\phi(r) = \phi(\beta(1)) = \gamma(1) \in U$, cioè $r \in \phi^{-1}(U)$. Questo mostra che $\coprod_{j\in J'} V_j \subseteq \phi^{-1}(U)$ e da perciò l'uguaglianza $\phi^{-1}(U) = \coprod_{j\in J'} V_j$.
Per concludere resta da mostrare che $\phi_{|V_j} : V_j \to U$ è un omeomorfismo per ogni $j \in J'$ e per questo è sufficente mostrare che $\phi_{|V_j} = q_{|U}^{-1} \circ p_{|V_j}$. Infine tale uguaglianza è conseguenza immediata di quanto visto prima: se $r \in V_j$ e $j \in J'$, allora sappiamo che $\phi(r) \in U$ e $q_{|U}(\phi(r)) = p(r) \in V$ quindi $\phi(r) = q_{|U}^{-1}(p(r)) = q_{|U}^{-1}(p_{|V_j}(r))$. ∎

Corollario 2.6 (Proprietà universale del rivestimento universale). *Sia X uno spazio topologico che possiede il rivestimento universale $p : R \to X$. Sia $q : T \to X$ un rivestimento con T connesso per archi e siano $r_0 \in R, t_0 \in T$ e $x_0 \in X$ tali che $p(r_0) = x_0 = q(t_0)$. Allora esiste un unico rivestimento $\varphi : R \to T$ tale che $q \circ \varphi = p$ e $\varphi(r_0) = t_0$.*

Dim. Sappiamo che R è localmente connesso per archi (Osservazione 2.3). Per il Corollario 2.4(i) esiste un unico sollevamento $\widetilde{p}$ di p a T tale che $\widetilde{p}(r_0) = t_0$. Posto $\varphi = \widetilde{p}$ ne segue immediatamente dal Lemma 2.5 che φ è un rivestimento. ∎

Corollario 2.7. *Sia X uno spazio topologico semplicemente connesso e localmente connesso per archi. Se $p : R \to X$ è un rivestimento con R connesso per archi, allora p è un omeomorfismo.*

Dim. Ovviamente l'identità $Id_X : X \to X$ è un rivestimento universale, quindi scelto $r_0 \in R$ e posto $x_0 = p(r_0)$, per il Corollario 2.6, esiste un rivestimento $\varphi : X \to R$ tale che $\varphi(x_0) = r_0$ e $p\circ\varphi = Id_X$. Per il Corollario 1.11 si ha $\pi_1(R, r_0) \cong p_*(\pi_1(R, r_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0) = \{1\}$ e quindi anche $\pi_1(R, r_0) = \{1\}$. Per il Corollario 1.14 si ha che φ è iniettiva, quindi un omeomorfismo (Esercizio 1.4) e quindi anche p lo è. ∎

2.2. Esistenza del rivestimento universale.

Sia X uno spazio topologico connesso per archi e localmente connesso per archi. È semplice trarre una condizione topologica necessaria affinchè esista un rivestimento universale $p : R \to X$. Sia infatti $x \in X$ e sia U un aperto ben ricoperto contenente x. Scegliamo un $r \in p^{-1}(x)$, così che c'è un aperto V tale che $r \in V \subseteq R$ e $p_{|V} : V \to U$ è un omeomorfismo. Siano $j : V \hookrightarrow R$ e $i : U \hookrightarrow X$ le inclusioni. Allora c'è un diagramma commutativo di applicazioni

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "p_{|V}"] & R \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, hook, "i"] & X \end{tikzcd}$$

che da luogo al seguente diagramma commutativo di gruppi fondamentali

$$\begin{tikzcd} \pi_1(V, r) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "(p_{|V})_*"] & \pi_1(R, r) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(U, x) \arrow[r, "i_*"] & \pi_1(X, x). \end{tikzcd}$$

Ora $\pi_1(R, r) = \{1\}$ e $(p_{|V})_*$ è un isomorfismo, da cui, per ogni $[\alpha] \in \pi_1(U, x)$, posto $[\beta] = (p_{|V})_*^{-1}([\alpha])$, si ha

$$i_*([\alpha]) = i_* \circ (p_{|V})_*([\beta]) = p_* \circ j_*([\beta]) = p_*([c_r]) = [c_x] = 1$$

il che dimostra che i_* è banale. In altre parole, l'esistenza del rivestimento universale implica che ogni punto $x \in X$ ha un aperto U contenente x tale che ogni cappio in U di base x è equivalente, in X, al cappio costante. Tale proprietà merita un nome.

Definizione 2.8. *Sia X uno spazio topologico connesso per archi e localmente connesso per archi. X si dice* **localmente semplicemente connesso** *se per ogni $x \in X$ esiste un aperto U tale che $x \in U \subseteq X$ e, se $i : U \hookrightarrow X$ è l'inclusione, allora $i_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ è banale.*

Esempi 2.9.
(a) Ogni spazio topologico semplicemente connesso è localmente semplicemente connesso. Più in generale ogni spazio topologico in cui ogni punto ha un intorno aperto semplicemente connesso è localmente semplicemente connesso.
(b) S^1 è localmente semplicemente connesso.
(c) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - \frac{2x}{n} = 0\}$ e sia $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ con la topologia Euclidea. X è connesso per archi, localmente connesso per archi ma non localmente semplicemente connesso (la dimostrazione di ciò è lasciata al lettore per esercizio).
(d) Sia $Y \subseteq \mathbb{R}^3$ il cono sull'insieme X dell'esempio (c) con vertice in un punto $V \in \mathbb{R}^3 - \mathbb{R}^2$, Y con la topologia Euclidea. Allora Y è semplicemente connesso ed inoltre ogni punto $y \in Y$ ha un sistema fondamentale di intorni non semplicemente connessi ma con i_* banale.

Un fatto sorprendente è che la condizione necessaria per l'esistenza del rivestimento universale è anche sufficente. In realtà, come vedremo più avanti, tale condizione da luogo a molto di più.

Teorema 2.10 (Esistenza del rivestimento universale). *Sia X uno spazio topologico connesso per archi e localmente connesso per archi. Allora X ha un rivestimento universale se e solo se X è localmente semplicemente connesso.*

Dim. Se X ha un rivestimento universale abbiamo già visto, nella discussione precedente la Definizione 2.8, che X è localmente semplicemente connesso.
Supporremo d'ora in poi che X è localmente semplicemente connesso e ne costruiremo un rivestimento universale.
Sia $x_0 \in X$ e sia $A(X, x_0) = \{\alpha : I \to X$ arco tale che $\alpha(0) = x_0\}$. Consideriamo in $A(X, x_0)$ la relazione di equivalenza $\alpha \sim \beta$ data dall'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ e sia $R = A(X, x_0)/_\sim$ l'insieme quoziente. Denotando con $[\alpha]$ la classe di equivalenza di $\alpha \in A(X, x_0)$, c'è un'applicazione

$$p : R \to X \text{ definita da } p([\alpha]) = \alpha(1)$$

(p è ben definita per il Teorema di Monodromia (Corollario 1.10)). Notiamo anche che p è suriettiva dato che X è connesso per archi.
Per dare una topologia ad R siano ora $[\alpha] \in R$ e sia V un aperto di X tale che $\alpha(1) \in V$. Definiamo

$$[\alpha, V] = \{[\alpha * \beta] \in R : \beta : I \to V \text{ è un arco tale che } \beta(0) = \alpha(1)\}.$$

Un primo obiettivo sarà dimostrare che la famiglia di tali sottoinsiemi di R forma una base di una topologia su R. Per vedere ciò osserviamo che,

$$\forall\ [\alpha] \in R \text{ si ha } [\alpha] \in [\alpha, V]$$

dato che $c_{\alpha(1)}$ è un arco in V di punto iniziale $\alpha(1)$ e quindi $[\alpha] = [\alpha * c_{\alpha(1)}] \in [\alpha, V]$. Allora

$$R = \bigcup_{[\alpha] \in R} [\alpha, V].$$

Ora se $[\beta] \in [\alpha_1, V_1] \cap [\alpha_2, V_2]$ allora esistono due archi $\gamma_1 : I \to V_1$, $\gamma_2 : I \to V_2$ tali che $[\beta] = [\alpha_1 * \gamma_1] = [\alpha_2 * \gamma_2]$. Quindi $\beta \sim \alpha_1 * \gamma_1$ e perciò $\beta(1) = (\alpha_1 * \gamma_1)(1) = \gamma_1(1) \in V_1$. Analogamente $\beta(1) \in V_2$, da cui $\beta(1) \in V_1 \cap V_2$ ed è definito $[\beta, V_1 \cap V_2]$. Allora $[\beta] \in [\beta, V_1 \cap V_2]$ e mostriamo che $[\beta, V_1 \cap V_2] \subseteq [\alpha_1, V_1] \cap [\alpha_2, V_2]$. Se $[\beta * \gamma] \in [\beta, V_1 \cap V_2]$ allora $\gamma : I \to V_1 \cap V_2$ è un arco tale che $\gamma(0) = \beta(1)$, quindi $\beta * \gamma \sim \alpha_1 * \gamma_1 * \gamma$. Ora $\gamma_1 * \gamma$ è un arco in V_1 di punto iniziale $\alpha_1(1)$, perciò $[\beta * \gamma] = [\alpha_1 * \gamma_1 * \gamma] \in [\alpha_1, V_1]$ e questo dimostra che $[\beta, V_1 \cap V_2] \subseteq [\alpha_1, V_1]$. Analogamente si avrà $[\beta, V_1 \cap V_2] \subseteq [\alpha_2, V_2]$ e dunque $[\beta, V_1 \cap V_2] \subseteq [\alpha_1, V_1] \cap [\alpha_2, V_2]$.
Allora, come è noto, c'è un'unica topologia su R che ha per base la famiglia degli aperti $[\alpha, V]$, al variare di $[\alpha] \in R$ e V aperto di X contenente $\alpha(1)$.
È facile vedere che p è aperta: infatti per ogni $[\alpha * \beta] \in [\alpha, V]$ si ha $p([\alpha * \beta]) = \beta(1)$ e quindi $p([\alpha, V])$ è la componente connessa per archi di $\alpha(1)$ in V e pertanto $p([\alpha, V])$ è aperto in X (Esercizio 1.18(a4)). Allora p manda aperti della base in aperti ed è quindi aperta. Ora facciamo vedere che p è continua. Sia $V \subseteq X$ un aperto e sia $[\alpha] \in p^{-1}(V)$, così che $\alpha(1) = p([\alpha]) \in V$ ed è definito l'aperto $[\alpha, V]$. Se $[\alpha * \beta] \in [\alpha, V]$ allora β è un arco in V, quindi $p([\alpha * \beta]) = \beta(1) \in V$, da cui $[\alpha * \beta] \in p^{-1}(V)$. Ciò mostra che $[\alpha, V] \subseteq p^{-1}(V)$ e ne segue che

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{[\alpha] \in p^{-1}(V)} [\alpha, V],$$

mostrando che $p^{-1}(V)$ è aperto e dunque che p è continua.

Sia ora $x \in X$. Per ipotesi possiamo trovare in X un aperto U contenente x, connesso per archi e tale che i_* è banale, dove $i : U \hookrightarrow X$ è l'inclusione. Sappiamo già, per quanto visto sopra, che $p^{-1}(U) = \bigcup_{[\alpha]\in p^{-1}(U)} [\alpha, U]$ ed asseriamo che esiste un sottoinsieme $J \subseteq p^{-1}(U)$ tale che

$$p^{-1}(U) = \coprod_{[\alpha]\in J} [\alpha, U].$$

Infatti se $[\alpha], [\alpha'] \in p^{-1}(U)$ sono tali che $[\alpha, U] \cap [\alpha', U] \neq \emptyset$ allora esistono due archi $\beta : I \to U$, $\gamma : I \to U$ tali che $[\alpha * \beta] = [\alpha' * \gamma] \in [\alpha, U] \cap [\alpha', U]$ e quindi $\alpha * \beta \sim \alpha' * \gamma$. Allora $\alpha \sim \alpha' * \gamma * \beta^o$ e per ogni arco $\delta : I \to U$ tale che $\delta(0) = \alpha(1)$ si ha $\alpha * \delta \sim \alpha' * \gamma * \beta^o * \delta$, cioè $[\alpha * \delta] = [\alpha' * \gamma * \beta^o * \delta] \in [\alpha', U]$. Questo dimostra che $[\alpha, U] \subseteq [\alpha', U]$ ed analogamente vale l'altra inclusione, mostrando che $[\alpha, U] = [\alpha', U]$. Questa proprietà implica l'esistenza di J.
Per dimostrare che p è un rivestimento resta da far vedere che $p_{|[\alpha,U]} : [\alpha, U] \to U$ è un omeomorfismo. Notiamo che $p_{|[\alpha,U]}$ è certamente continua ed aperta, in quanto restrizione ad un aperto di un'applicazione continua ed aperta. Inoltre $p_{|[\alpha,U]}$ è suriettiva dato che U è connesso per archi ed infine $p_{|[\alpha,U]}$ è iniettiva: se $p_{|[\alpha,U]}([\alpha * \beta]) = p_{|[\alpha,U]}([\alpha * \gamma])$, allora $\beta(1) = \gamma(1)$ e quindi $\beta * \gamma^o$ è un cappio in U di base $\alpha(1)$ e pertanto, dato che i_* è banale, si ha che $\beta * \gamma^o \sim c_{\alpha(1)}$. Ne segue che $\beta \sim \gamma$ e quindi $\alpha * \beta \sim \alpha * \gamma$, da cui $[\alpha * \beta] = [\alpha * \gamma]$. Abbiamo allora dimostrato che $p_{|[\alpha,U]}$ è un omeomorfismo.
Resta allora da vedere che R è connesso per archi ed ha gruppo fondamentale banale. Per mostrare entrambe introdurremo degli archi opportuni in R. Sia $[\alpha] \in R$ e per ogni $s \in I$ definiamo l'arco $\alpha_s : I \to X$ con $\alpha_s(t) = \alpha(st)$ per ogni $t \in I$ (cioè l'arco che percorre α tra $x_0 = \alpha(0)$ e $\alpha(s)$). Osserviamo che $\alpha_0 = c_{x_0}$ e $\alpha_1 = \alpha$. Sia ora $\phi_\alpha : I \to R$ definita da $\phi_\alpha(s) = [\alpha_s]$. Allora $\phi_\alpha(0) = [\alpha_0] = [c_{x_0}]$ e $\phi_\alpha(1) = [\alpha_1] = [\alpha]$.
Mostreremo ora che ϕ_α è continua, perciò ϕ_α è un arco che congiunge un qualsiasi $[\alpha] \in R$ con il punto $[c_{x_0}] \in R$, il che darà la connessione per archi di R. Sia $s \in I$ e sia W un aperto di R tale che $\phi_\alpha(s) = [\alpha_s] \in W$. Allora esiste un aperto della base $[\gamma, U]$ tale che $[\alpha_s] \in [\gamma, U] \subseteq W$. Pertanto $\gamma : I \to X$ è un arco tale che $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) \in U$ ed esiste un arco $\beta : I \to U$ tale che $\beta(0) = \gamma(1)$ e $\alpha_s \sim \gamma * \beta$. Allora $\alpha(s) = \alpha_s(1) = \beta(1) \in U$ e, per la continuità di α, esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $\alpha((s - \varepsilon, s + \varepsilon)) \subseteq U$. Ora per ogni $v \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ si ha $\alpha(v) \in U$ e $\phi_\alpha(v) = [\alpha_v]$. Ma chiaramente $\alpha_v \sim \alpha_s * \delta$ per qualche arco δ in U (δ non è altro che l'arco α tra $\alpha(s)$ ed $\alpha(v)$ se $v \geq s$ o l'arco α^o tra $\alpha(v)$ ed $\alpha(s)$ se $v \leq s$). Ne segue che $\phi_\alpha(v) = [\alpha_v] = [\alpha_s * \delta] = [\gamma * \beta * \delta] \in [\gamma, U] \subseteq W$. Questo dimostra la continuità di ϕ_α e quindi la connessione per archi di R.
Infine facciamo vedere che, posto $r_0 = [c_{x_0}] \in R$, si ha $\pi_1(R, r_0) = \{[c_{r_0}]\}$. Sia $\phi : I \to R$ un cappio di base r_0 e sia $\alpha = p \circ \phi$. L'unicità del sollevamento di archi (Teorema 1.8) implica che $\phi_\alpha = \phi$: per ogni $s \in I$ si ha $p(\phi_\alpha(s)) = p([\alpha_s]) = \alpha_s(1) = \alpha(s)$ e $\phi_\alpha(0) = [\alpha_0] = [c_{x_0}] = r_0 = \phi(0)$. Allora

$$[c_{x_0}] = r_0 = \phi(1) = \phi_\alpha(1) = [\alpha_1] = [\alpha] = [p \circ \phi] = p_*([\phi])$$

e l'iniettività di p_* implica che $[\phi] = [c_{r_0}]$. ■

3. Teoria di Galois dei rivestimenti

Come abbiamo visto nella sezione precedente, la condizione necessaria e sufficente affinchè, dato uno spazio topologico connesso per archi e localmente connesso per archi X, esista un rivestimento $p : R \to X$ tale che $p_*(\pi_1(R, r_0)) = \{1\}$, è che X è localmente semplicemente connesso. Ma, come vedremo in questa sezione, questa condizione da molto di più: da un lato mostra che *ogni sottogruppo di* $\pi_1(X, x_0)$ proviene da qualche rivestimento di X (Teorema 3.1) e dall'altro permette di *completare la caratterizzazione topologico-algebrica della teoria dei rivestimenti* (Teorema 3.3). Tale caratterizzazione assomiglia alla teoria di Galois dei campi ed è pertanto chiamata Teoria di Galois dei rivestimenti.

3.1. Esistenza del rivestimento universale con dato sottogruppo immagine.

Teorema 3.1 (Esistenza del rivestimento universale con dato sottogruppo immagine). *Sia X uno spazio topologico localmente semplicemente connesso e sia $x_0 \in X$. Per ogni sottogruppo $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$ esiste un rivestimento $p_H : R_H \to X$ con R_H connesso per archi ed un punto $r_H \in R_H$ tale che $(p_H)_*(\pi_1(R_H, r_H)) = H$.*

Dim. Con la stessa notazione della dimostrazione del Teorema di esistenza del rivestimento universale (Teorema 2.10) consideriamo il rivestimento universale ivi costruito $R = A(X, x_0)/_\sim$. Dati $[\alpha], [\beta] \in R$ definiamo una relazione di equivalenza al modo seguente

$$[\alpha] \sim_H [\beta] \text{ se e solo se } \alpha(1) = \beta(1) \text{ e } [\alpha * \beta^o] \in H.$$

Verifichiamo che $\sim_H$ è una relazione di equivalenza. Per ogni $[\alpha] \in R$ si ha $[\alpha] \sim_H [\alpha]$ dato che $[\alpha * \alpha^o] = [c_{x_0}] \in H$. Se $[\alpha] \sim_H [\beta]$ allora $\alpha(1) = \beta(1)$ e $[\alpha * \beta^o] \in H$, quindi anche $[\beta * \alpha^o] = [\alpha * \beta^o]^{-1} \in H$ e ciò mostra che $[\beta] \sim_H [\alpha]$. Se $[\alpha] \sim_H [\beta]$ e $[\beta] \sim_H [\gamma]$ allora $\alpha(1) = \beta(1) = \gamma(1)$ e $[\alpha * \beta^o], [\beta * \gamma^o] \in H$, quindi anche $[\alpha * \gamma^o] = [\alpha * \beta^o * \beta * \gamma^o] = [\alpha * \beta^o][\beta * \gamma^o] \in H$ e ciò mostra che $[\alpha] \sim_H [\gamma]$.
Ora possiamo definire $R_H = R/_{\sim_H}$ con la topologia quoziente. Abbiamo allora due applicazioni $\pi : R \to R_H$ l'applicazione quoziente e $p_H : R_H \to X$ l'applicazione definita in modo che commuti con p: se $z \in R_H$ allora esiste $[\alpha] \in R$ tale che $z = \pi([\alpha])$ e definiamo $p_H(z) = \alpha(1)$. In effetti p_H è ben definita dato che se $z = \pi([\alpha]) = \pi([\beta])$ allora $[\alpha] \sim_H [\beta]$ e quindi $\alpha(1) = \beta(1)$. Notiamo inoltre che, essendo π suriettiva ed R connesso per archi, ne segue che anche R_H lo è.
Prima di dimostrare che $p_H : R_H \to X$ ha le proprietà che vogliamo, studiamo il comportamento di π sugli aperti della base di R.
Intanto asseriamo che $\pi([\gamma, V]) \cap \pi([\gamma_1, V]) \neq \emptyset$ se e solo se $\pi([\gamma, V]) = \pi([\gamma_1, V])$. Infatti se $\pi([\gamma, V]) \cap \pi([\gamma_1, V]) \neq \emptyset$ allora esistono due archi $\beta : I \to V$, $\beta_1 : I \to V$ tali che $[\gamma * \beta] \sim_H [\gamma_1 * \beta_1]$ e quindi $\beta(1) = \beta_1(1)$ e $[\gamma * \beta * \beta_1^o * \gamma_1^o] \in H$. Ma questo implica che $[\gamma * \beta * \beta_1^o] \sim_H [\gamma_1]$: infatti $(\gamma * \beta * \beta_1^o)(1) = \beta_1^o(1) = \beta_1(0) = \gamma_1(1)$ e, appunto, $[\gamma * \beta * \beta_1^o * \gamma_1^o] \in H$. Ora, per ogni arco $\delta : I \to V$ tale che $\delta(0) = \gamma_1(1)$ si ha $[\gamma * \beta * \beta_1^o * \delta] \sim_H [\gamma_1 * \delta]$ in quanto $(\gamma * \beta * \beta_1^o * \delta)(1) = \delta(1) = (\gamma_1 * \delta)(1)$ e $[\gamma * \beta * \beta_1^o * \delta * \delta^o * \gamma_1^o] = [\gamma * \beta * \beta_1^o * \gamma_1^o] \in H$. Ne segue che $\pi([\gamma_1, V]) \subseteq \pi([\gamma, V])$. Ma analogamente si dimostra l'altra inclusione e quindi $\pi([\gamma, V]) = \pi([\gamma_1, V])$.
Ora facciamo vedere che ogni $\pi([\gamma, V])$ è aperto in R_H, cioè, per definizione di topologia quoziente, $\pi^{-1}(\pi([\gamma, V]))$ è aperto in R. Sia $[\alpha] \in \pi^{-1}(\pi([\gamma, V]))$ così che $\pi([\alpha]) \in \pi([\gamma, V])$ e quindi esiste $[\gamma * \delta] \in [\gamma, V]$ tale che $[\alpha] \sim_H [\gamma * \delta]$. In particolare $\alpha(1) = \delta(1) \in V$ ed è perciò definito $[\alpha, V]$. Dato che $[\alpha] \in [\alpha, V]$ abbiamo $\pi([\alpha]) \in \pi([\alpha, V]) \cap \pi([\gamma, V])$. Allora, per la proprietà dimostrata sopra, si ha $\pi([\alpha, V]) = \pi([\gamma, V])$ e quindi $[\alpha, V] \subseteq \pi^{-1}(\pi([\gamma, V]))$. Questo dimostra che $\pi^{-1}(\pi([\gamma, V])) = \bigcup_{[\alpha] \in \pi^{-1}(\pi([\gamma, V]))} [\alpha, V]$ è aperto in R.

Per vedere che p_H è continua ricordiamo che, per ogni aperto $V \subseteq X$, si ha $p^{-1}(V) = \bigcup_{[\gamma]\in p^{-1}(V)}[\gamma, V]$. Asseriamo che questo implica che

$$p_H^{-1}(V) = \bigcup_{[\gamma]\in p^{-1}(V)} \pi([\gamma, V]).$$

Infatti se $z \in p_H^{-1}(V)$ ed $[\alpha] \in R$ tale che $z = \pi([\alpha])$ allora $p([\alpha]) = \alpha(1) = p_H(z) \in V$, da cui $[\alpha] \in p^{-1}(V) = \bigcup_{[\gamma]\in p^{-1}(V)}[\gamma, V]$, pertanto $[\alpha] \in [\gamma, V]$ per qualche $[\gamma] \in p^{-1}(V)$ e dunque $z = \pi([\alpha]) \in \pi([\gamma, V])$. Viceversa se $z \in \pi([\gamma, V])$ per qualche $[\gamma] \in p^{-1}(V)$, allora esiste $[\alpha] \in [\gamma, V]$ tale che $z = \pi([\alpha])$. Ne segue che $p_H(z) = \alpha(1) \in V$ e dunque $z \in p_H^{-1}(V)$. Abbiamo allora dimostrato l'uguaglianza $p_H^{-1}(V) = \bigcup_{[\gamma]\in p^{-1}(V)} \pi([\gamma, V])$ e, dato che sappiamo che i $\pi([\gamma, V])$ sono aperti in R_H, ne segue che anche $p_H^{-1}(V)$ è aperto in R_H e dunque p_H è continua. Inoltre, dato che $\pi([\gamma, V]) \cap \pi([\gamma_1, V]) \neq \emptyset$ se e solo se $\pi([\gamma, V]) = \pi([\gamma_1, V])$, possiamo trovare un sottoinsieme $J \subseteq p^{-1}(V)$ tale che

$$p_H^{-1}(V) = \coprod_{[\gamma]\in J} \pi([\gamma, V]).$$

Tale uguaglianza vale per ogni aperto V. Ora faremo vedere però che se $x \in X$ e U è un aperto contenente x, connesso per archi e tale che i_* è banale, dove $i : U \hookrightarrow X$ è l'inclusione, allora $(p_H)_{|\pi([\gamma,U])} : \pi([\gamma, U]) \to U$ è un omeomorfismo. Ovviamente ciò mostrerà che p_H è un rivestimento.

Ricordando che $p_{|[\gamma,U]} : [\gamma, U] \to U$ è un omeomorfismo, osserviamo che $(p_H)_{|\pi([\gamma,U])}$ è certamente continua e suriettiva, dato che se $u \in U$ allora esiste $[\alpha] \in [\gamma, U]$ tale che $p([\alpha]) = u$ e quindi $\pi([\alpha]) \in \pi([\gamma, U])$ ed ovviamente $(p_H)_{|\pi([\gamma,U])}(\pi([\alpha])) = p([\alpha]) = u$. Inoltre $(p_H)_{|\pi([\gamma,U])}$ è iniettiva, dato che se per $z, z' \in \pi([\gamma, U])$ si ha $p_H(z) = p_H(z')$ allora esistono $[\alpha], [\alpha'] \in [\gamma, U]$ tali che $z = \pi([\alpha]), z' = \pi([\alpha'])$. Ma allora $p_{|[\gamma,U]}([\alpha]) = p_H(\pi([\alpha])) = p_H(z) = p_H(z') = p_H(\pi([\alpha'])) = p_{|[\gamma,U]}([\alpha'])$ da cui $[\alpha] = [\alpha']$ e quindi $z = \pi([\alpha]) = \pi([\alpha']) = z'$. Ora mostriamo che $(p_H)_{|\pi([\gamma,U])}$ è aperta. Sia $A \subseteq \pi([\gamma, U])$ un aperto, così che, usando il fatto che $\pi([\gamma, U])$ è aperto in R_H, si ha che anche A è aperto in R_H e quindi, per definizione di topologia quoziente, $\pi^{-1}(A)\cap[\gamma, U]$ è aperto in R e quindi anche in $[\gamma, U]$. Ovviamente si ha $\pi(\pi^{-1}(A)\cap[\gamma, U]) = A$ e dunque $p_H(A) = p_H \circ \pi(\pi^{-1}(A) \cap [\gamma, U]) = p(\pi^{-1}(A) \cap [\gamma, U]) = p_{|[\gamma,U]}(\pi^{-1}(A) \cap [\gamma, U])$ è certamente aperto in U.

Resta allora da vedere che esiste un punto $r_H \in R_H$ tale che $(p_H)_*(\pi_1(R_H, r_H)) = H$.

Siano $r_0 = [c_{x_0}] \in R$ ed $r_H = \pi(r_0) \in R_H$. Iniziamo col mostrare che per ogni $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ si ha che $\widetilde{\gamma}_{r_0}(1) = [\gamma]$. Infatti posto $\phi = \widetilde{\gamma}_{r_0}$ ricordiamo che, nella dimostrazione del Teorema di esistenza del rivestimento universale (Teorema 2.10), abbiamo visto che $\phi = \phi_\alpha$ dove $\alpha = p\circ\phi$. Quindi, in questo caso, $\widetilde{\gamma}_{r_0} = \phi = \phi_\gamma$, da cui $\widetilde{\gamma}_{r_0}(1) = \phi_\gamma(1) = [\gamma]$. Ora osserviamo che $\pi \circ \widetilde{\gamma}_{r_0}$ è un cappio in R_H se e solo se $\pi(r_0) = \pi([c_{x_0}]) = \pi([\gamma])$, cioè se e solo se $[c_{x_0}] \sim_H [\gamma]$, ovvero se e solo se $[\gamma] \in H$.

Sia $[\gamma] \in H$, così che $\pi \circ \widetilde{\gamma}_{r_0}$ è un cappio in R_H di base r_H e quindi $(p_H)_*([\pi \circ \widetilde{\gamma}_{r_0}]) = [p_H \circ \pi \circ \widetilde{\gamma}_{r_0}] = [p \circ \widetilde{\gamma}_{r_0}] = [\gamma]$, mostrando che $[\gamma] \in (p_H)_*(\pi_1(R_H, r_H))$. Così abbiamo ottenuto l'inclusione $H \subseteq (p_H)_*(\pi_1(R_H, r_H))$.

Viceversa sia $[\gamma] \in (p_H)_*(\pi_1(R_H, r_H))$ così che esiste un cappio α in R_H di base r_H tale che $[\gamma] = (p_H)_*([\alpha]) = [p_H \circ \alpha]$. Posto $\beta = p_H \circ \alpha$ osserviamo che $\pi \circ \widetilde{\beta}_{r_0} = \alpha$: infatti $p_H \circ \pi \circ \widetilde{\beta}_{r_0} = p \circ \widetilde{\beta}_{r_0} = \beta$ e $(\pi \circ \widetilde{\beta}_{r_0})(0) = \pi(r_0) = r_H = \alpha(0)$ e basta applicare l'unicità del sollevamento. Ma allora $\pi \circ \widetilde{\beta}_{r_0} = \alpha$ è un cappio in R_H e quindi $[\beta] \in H$. Ne segue che $[\gamma] = [p_H \circ \alpha] = [\beta] \in H$, mostrando l'inclusione $(p_H)_*(\pi_1(R_H, r_H)) \subseteq H$. ∎

Prima di mostrare il risultato conclusivo della teoria dei rivestimenti introduciamo la seguente

Definizione 3.2. *Sia X uno spazio topologico e sia $x_0 \in X$ e siano $p : R \to X$, $q : T \to X$ due rivestimenti connessi per archi con punti $r_0 \in R, t_0 \in T$ tali che $p(r_0) = x_0 = q(t_0)$. Diremo che la coppia (p, R) è* **isomorfa** *alla coppia (q, T) se c'è un omeomorfismo $\phi : R \to T$ tale che $q \circ \phi = p$. Diremo che la terna (p, R, r_0) è* **isomorfa** *alla terna (q, T, t_0) se c'è un omeomorfismo $\phi : R \to T$ tale che $q \circ \phi = p$ e $\phi(r_0) = t_0$.*

3.2. Corrispondenza di Galois tra rivestimenti e sottogruppi.

Teorema 3.3 (Corrispondenza di Galois tra rivestimenti e sottogruppi). *Sia X uno spazio topologico localmente semplicemente connesso e sia $x_0 \in X$. Allora c'è una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle coppie (p, R) di rivestimenti connessi per archi $p : R \to X$ modulo isomorfismo e le classi di coniugio dei sottogruppi di $\pi_1(X, x_0)$. Analogamente c'è una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle terne (p, R, r_0) di rivestimenti connessi per archi $p : R \to X$ con un punto $r_0 \in R$ tale che $p(r_0) = x_0$ modulo isomorfismo ed i sottogruppi di $\pi_1(X, x_0)$.*

Dim. Consideriamo prima l'applicazione

$$\psi : \{(p, R, r_0), p : R \to X \text{ rivestimento c.p.a.}, p(r_0) = x_0\}_{/isom.} \to \{\text{sottogruppi di } \pi_1(X, x_0)\}$$

che associa alla classe di (p, R, r_0) modulo isomorfismo il sottogruppo $p_*(\pi_1(R, r_0))$ (ψ è ben definita per la prima affermazione del Corollario 1.20).
La suriettività di ψ segue dal Teorema di esistenza del rivestimento universale con dato sottogruppo immagine (Teorema 3.1), mentre l'iniettività di ψ segue dalla seconda affermazione del Corollario 1.20 (che si applica dato che X è localmente connesso per archi e quindi ogni suo rivestimento lo è per l'Esercizio 1.18(b)).
Ora consideriamo l'applicazione

$$\chi : \{(p, R), p : R \to X \text{ rivestimento c.p.a.}\}_{/isomorfismo} \to \{\text{sottogruppi di } \pi_1(X, x_0)\}_{/coniugio}$$

che associa alla classe di (p, R) modulo isomorfismo la classe di coniugio del sottogruppo $p_*(\pi_1(R, r_0))$, dove $r_0 \in R$ è un qualsiasi punto tale che $p(r_0) = x_0$.
Prima facciamo vedere che χ è ben definita. Intanto se due coppie (p, R) e (q, T) sono isomorfe tramite un omeomorfismo $\phi : R \to T$ tale che $q \circ \phi = p$ e poniamo $t_0 = \phi(r_0)$ allora $p_*(\pi_1(R, r_0)) = q_*(\pi_1(T, t_0))$ per la prima affermazione del Corollario 1.20. Inoltre se $r_1 \in R$ è tale che $p(r_1) = x_0$ asseriamo che $p_*(\pi_1(R, r_0))$ è coniugato a $p_*(\pi_1(R, r_1))$. Se $\gamma : I \to R$ è un arco tale che $\gamma(0) = r_0$, $\gamma(1) = r_1$ allora $p \circ \gamma$ è un cappio in X di base x_0. Per ogni $[\alpha] \in \pi_1(R, r_0)$ si ha

$$[p\circ\gamma]^{-1}p_*([\alpha])[p\circ\gamma] = [(p\circ\gamma^o)*(p\circ\alpha)*(p\circ\gamma)] = [p\circ(\gamma^o*\alpha*\gamma)] = p_*([\gamma^o*\alpha*\gamma]) \in p_*(\pi_1(R, r_1))$$

dato che $\gamma^o * \alpha * \gamma$ è un cappio in R di base r_1. Questo mostra che

$$[p \circ \gamma]^{-1}p_*(\pi_1(R, r_0))[p \circ \gamma] \subseteq p_*(\pi_1(R, r_1)).$$

Analogamente si ha che $[p \circ \gamma^o]^{-1} p_*(\pi_1(R, r_1))[p \circ \gamma^o] \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0))$, ovvero che

$$[p \circ \gamma] p_*(\pi_1(R, r_1))[p \circ \gamma]^{-1} \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0)),$$

da cui $p_*(\pi_1(R, r_1)) \subseteq [p \circ \gamma]^{-1} p_*(\pi_1(R, r_0))[p \circ \gamma]$. Allora $[p \circ \gamma]^{-1} p_*(\pi_1(R, r_0))[p \circ \gamma] = p_*(\pi_1(R, r_1))$ ed abbiamo dimostrato che χ è ben definita.
La suriettività di χ segue ancora dal Teorema di esistenza del rivestimento universale con dato sottogruppo immagine (Teorema 3.1). Ora supponiamo date due coppie (p, R) e (q, T) tali che $p_*(\pi_1(R, r_0))$, e $q_*(\pi_1(T, t_0))$ sono coniugati, dove $r_0 \in R, t_0 \in T$ sono tali che $p(r_0) = x_0 = q(t_0)$. Allora esiste $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ tale che $[\alpha]^{-1} p_*(\pi_1(R, r_0))[\alpha] = q_*(\pi_1(T, t_0))$. Ma, per quanto visto prima, posto $r_1 = \widetilde{\alpha}_{r_0}(1)$, si ha $[\alpha]^{-1} p_*(\pi_1(R, r_0))[\alpha] = p_*(\pi_1(R, r_1))$. Allora $p_*(\pi_1(R, r_1)) = q_*(\pi_1(T, t_0))$ e la seconda affermazione del Corollario 1.20 implica che (p, R) è isomorfa a (q, T). Ciò mostra l'iniettività di χ. ■

CAPITOLO 3

Teoria dell'Omologia

1. Omologia Singolare

1.1. Definizione.

DEFINIZIONE 1.1. *Sia* $p \in \mathbb{Z}, p \geq 0$ *e siano* $E_0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$ *e, per* $1 \leq i \leq p$, $E_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0) \in \mathbb{R}^p$ *(1 al posto i). Il* **p-simplesso standard** *è il sottoinsieme di* $\mathbb{R}^p$

$$\Delta_p = \{\sum_{i=0}^{p} t_i E_i \in \mathbb{R}^p : 0 \leq t_i \leq 1 \ \forall i = 0, \dots, p \ e \ \sum_{i=0}^{p} t_i = 1\}$$

con la topologia Euclidea.

DEFINIZIONE 1.2. *Siano* X *uno spazio topologico e* $p \in \mathbb{Z}$. *Se* $p \geq 0$, *un* p**-simplesso singolare in** X *è un'applicazione continua* $\sigma : \Delta_p \to X$. *Il* **gruppo delle** p**-catene singolari di** X, *denotato con* $C_p(X)$, *è, se* $p \geq 0$, *il gruppo abeliano libero generato dai p-simplessi singolari in* X *(cioè* $C_p(X)$ *è il gruppo delle applicazioni dall'insieme dei p-simplessi singolari di* X *a* $\mathbb{Z}$ *che sono nulle eccetto su un numero finito di p-simplessi singolari di* X*). Porremo invece* $C_p(X) = \{0\}$ *se* $p < 0$. *Una* p**-catena singolare di** X *è un elemento di* $C_p(X), p \in \mathbb{Z}$.

NOTAZIONE 1.3. *Se* $p \in \mathbb{Z}, p \geq 0$, *una p-catena singolare di* X *verrà denotata con una somma formale* $\sum_\sigma n_\sigma \sigma$, *dove la somma è su tutti i p-simplessi singolari di* X *e* $n_\sigma \in \mathbb{Z}$ *sono nulli eccetto un numero finito. Analogamente se* $c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma, c' = \sum_\sigma n'_\sigma \sigma \in C_p(X)$, *si ha* $c \pm c' = \sum_\sigma (n_\sigma \pm n'_\sigma)\sigma$.

ESEMPIO 1.4.
Uno 0-simplesso di X è semplicememte un punto di X mentre, dato che $\Delta_1 = I$, un 1-simplesso di X è un arco in X.

Il gruppo delle p-catene è troppo grande per poter essere utilizzabile in termini topologico-algebrici. Si rende pertanto necessario l'introduzione di un opportuno operatore.

DEFINIZIONE 1.5. *Siano* $p \in \mathbb{Z}, p \geq 1$ *e* $i \in \{0, \dots, p\}$. *L'*i**-esima applicazione faccia** *è l'applicazione* $F_{i,p} : \Delta_{p-1} \to \Delta_p$ *univocamente definita, estendendo per linearità, da*

$$F_{i,p}(E_0) = E_0, \dots, F_{i,p}(E_{i-1}) = E_{i-1}, F_{i,p}(E_i) = E_{i+1}, \dots, F_{i,p}(E_{p-1}) = E_p.$$

Si può visualizzare $F_{i,p}$ come l'applicazione che identifica Δ_{p-1} con la faccia di Δ_p opposta al vertice E_i. Tali applicazioni permettono di definire un operatore

DEFINIZIONE 1.6. *Sia* $p \in \mathbb{Z}, p \geq 1$ *e sia* σ *un p-simplesso singolare di uno spazio topologico* X *e, per ogni* $i \in \{0, \dots, p\}$, *consideriamo i* $(p-1)$*-simplessi singolari* $\sigma \circ F_{i,p}$ *di* X.

Ponendo

$$\partial_p(\sigma) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma \circ F_{i,p}$$

è definito, estendendo per linearità, un omomorfismo $\partial_p : C_p(X) \to C_{p-1}(X)$*. Poniamo invece* $\partial_p = 0$ *se* $p \in \mathbb{Z}, p \leq 0$*. L'omomorfismo* ∂_p *è detto* **p-esimo operatore di bordo**.

Sia $p \in \mathbb{Z}$*. Un* **p-ciclo** *è una* p*-catena* c *tale che* $\partial_p(c) = 0$*; un* **p-bordo** *è una* p*-catena* c *tale che esiste una* $(p+1)$*-catena* b *tale che* $\partial_{p+1}(b) = c$*. Il* **gruppo dei p-cicli** *verrà denotato con* $Z_p(X)$ *ed il* **gruppo dei p-bordi** *con* $B_p(X)$*.*

Esempio 1.7.
Sia σ un 1-simplesso di X (cioè un arco in X). Allora $F_{0,1}(\Delta_0) = \{1\}$ e $F_{1,1}(\Delta_0) = \{0\}$, da cui $\partial_1(\sigma) = \sigma(1) - \sigma(0)$ e σ è un 1-ciclo se e solo se è un cappio.

Un fatto fondamentale dell'operatore di bordo, che permette, come vedremo, di definire l'omologia, è che soddisfa una condizione di complesso.

Lemma 1.8. *Siano* X *uno spazio topologico,* $p \in \mathbb{Z}$ *e* $c \in C_p(X)$*. Allora*

$$\partial_{p-1}(\partial_p(c)) = 0.$$

Dim. L'asserto essendo ovvio per $p \leq 1$, supponiamo $p \geq 2$. Iniziamo ad osservare che, per ogni $0 \leq j < i \leq p$, si ha

$$(*) \qquad F_{i,p} \circ F_{j,p-1} = F_{j,p} \circ F_{i-1,p-1}.$$

Infatti, per $0 \leq k \leq j-1$ si ha $F_{i,p} \circ F_{j,p-1}(E_k) = F_{i,p}(E_k) = E_k$; per $j \leq k \leq i-2$ si ha $F_{i,p} \circ F_{j,p-1}(E_k) = F_{i,p}(E_{k+1}) = E_{k+1}$ e per $i-1 \leq k \leq p-2$ si ha $F_{i,p} \circ F_{j,p-1}(E_k) = F_{i,p}(E_{k+1}) = E_{k+2}$. Analogamente, per $0 \leq k \leq j-1$ si ha $F_{j,p} \circ F_{i-1,p-1}(E_k) = F_{j,p}(E_k) = E_k$; per $j \leq k \leq i-2$ si ha $F_{j,p} \circ F_{i-1,p-1}(E_k) = F_{j,p}(E_k) = E_{k+1}$ e per $i-1 \leq k \leq p-2$ si ha $F_{j,p} \circ F_{i-1,p-1}(E_k) = F_{j,p}(E_{k+1}) = E_{k+2}$. Dunque $F_{i,p} \circ F_{j,p-1}$ e $F_{j,p} \circ F_{i-1,p-1}$ sono uguali dato che coincidono su ogni E_k. Ora, osservando che, per linearità è ovviamente sufficente supporre $c = \sigma$, calcoliamo

$$\partial_{p-1}(\partial_p(\sigma)) = \partial_{p-1}(\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma \circ F_{i,p}) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \partial_{p-1}(\sigma \circ F_{i,p}) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \sigma \circ F_{i,p} \circ F_{j,p-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_{i,p} \circ F_{j,p-1} = \sum_{0 \leq j < i \leq p} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_{i,p} \circ F_{j,p-1} + \sum_{0 \leq i \leq j \leq p-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_{i,p} \circ F_{j,p-1}.$$

Facendo, nella seconda somma, il cambio di indici $i = j', j = i' - 1$ si ottiene

$$\partial_{p-1}(\partial_p(\sigma)) = \sum_{0 \leq j < i \leq p} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_{i,p} \circ F_{j,p-1} + \sum_{0 \leq j' < i' \leq p} (-1)^{j'+i'-1} \sigma \circ F_{j',p} \circ F_{i'-1,p-1}$$

ed applicando $(*)$, si deduce

$$\partial_{p-1}(\partial_p(\sigma)) = \sum_{0 \leq j < i \leq p} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_{i,p} \circ F_{j,p-1} + \sum_{0 \leq j' < i' \leq p} (-1)^{j'+i'-1} \sigma \circ F_{i',p} \circ F_{j',p-1} = 0. \quad \blacksquare$$

Corollario 1.9. *Sia* X *uno spazio topologico. Allora* $B_p(X) \subseteq Z_p(X)$ *per ogni* $p \in \mathbb{Z}$*.*

Dim. Basta osservare che, per definizione (Definizione 1.6), si ha $B_p(X) = \operatorname{Im} \partial_{p+1}$ e $Z_p(X) = \operatorname{Ker} \partial_p$ ed applicare il Lemma 1.8. ■

Il corollario permette la seguente

Definizione 1.10. *Siano X uno spazio topologico e $p \in \mathbb{Z}$. Il* **p-esimo gruppo di omologia singolare di** *X è $H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X)$. Diremo che due p-cicli c, c' sono* **omologhi** *se $c - c' \in B_p(X)$.*

Ovviamente i gruppi di omologia sono interessanti solo per $p \geq 0$ dato che $H_p(X) = \{0\}$ se $p < 0$. Il fatto di averli definiti anche per $p < 0$ semplifica però l'enunciato di alcuni risultati successivi.

1.2. Proprietà funtoriali ed invarianza topologica dell'omologia.

Definizione 1.11. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua tra due spazi topologici. Per ogni $p \in \mathbb{Z}$ sia $f_{\#,p} : C_p(X) \to C_p(Y)$ l'omomorfismo definito, se $p \geq 0$, da*

$$f_{\#,p}(\sum_\sigma n_\sigma \sigma) = \sum_\sigma n_\sigma (f \circ \sigma)$$

e $f_{\#,p} = 0$ se $p < 0$.

In realtà $f_{\#,p}$ si estende all'omologia.

Lemma 1.12. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua tra due spazi topologici, $p \in \mathbb{Z}$ e $c \in C_p(X)$. Allora*

$$f_{\#,p-1}(\partial_p(c)) = \partial_p(f_{\#,p}(c)).$$

Dim. L'asserto è ovvio se $p \leq 0$, dunque supponiamo $p \geq 1$. Per linearità è sufficente supporre che $c = \sigma$ è un p-simplesso. Ora

$$f_{\#,p-1}(\partial_p(\sigma)) = f_{\#,p-1}(\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma \circ F_{i,p}) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (f \circ \sigma \circ F_{i,p}) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i f_{\#,p}(\sigma) \circ F_{i,p} = \partial_p(f_{\#,p}(\sigma)).$$ ■

Corollario 1.13. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua tra due spazi topologici e sia $p \in \mathbb{Z}$. Allora $f_{\#,p}(Z_p(X)) \subseteq Z_p(Y)$, $f_{\#,p}(B_p(X)) \subseteq B_p(Y)$ ed è pertanto definito un omomorfismo $f_{*,p} : H_p(X) \to H_p(Y)$ ponendo*

$$f_{*,p}(c + B_p(X)) = f_{\#,p}(c) + B_p(Y).$$

Dim. Se $c \in Z_p(X)$ si ha, per il Lemma 1.12, $\partial_p(f_{\#,p}(c)) = f_{\#,p-1}(\partial_p(c)) = f_{\#,p-1}(0) = 0$ e se $c \in B_p(X)$ c'è $b \in C_{p+1}(X)$ tale che $\partial_{p+1}(b) = c$ e quindi, per il Lemma 1.12, $f_{\#,p}(c) = f_{\#,p}(\partial_{p+1}(b)) = \partial_{p+1}(f_{\#,p+1}(b)) \in B_p(Y)$. Ovviamente questo permette di definire $f_{*,p}$. ■

Una conseguenza formale, ma importante, è la seguente

Proposizione 1.14 (Proprietà funtoriali dell'omologia). *Siano X, Y, Z spazi topologici e $p \in \mathbb{Z}$. Allora*

(i) $(\mathrm{Id}_X)_{*,p} = \mathrm{Id}_{H_p(X)}$

(ii) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono applicazioni continue si ha $(g \circ f)_{*,p} = g_{*,p} \circ f_{*,p}$.

Dim. Al solito supponiamo $p \geq 0$. Si ha, per ogni p-simplesso σ, $(\mathrm{Id}_X)_{\#,p}(\sigma) = \sigma$ e $(g \circ f)_{\#,p}(\sigma) = g \circ f \circ \sigma = g \circ f_{\#,p}(\sigma) = g_{\#,p} \circ f_{\#,p}(\sigma)$ da cui si ottengono immediatamente la (i) e la (ii) per linearità. ■

Questo permette immediatamente di mostrare l'invarianza topologica dell'omologia. In realtà l'omologia è anche invariante per omotopia, ma questo lo vedremo più avanti.

Corollario 1.15 (Invarianza topologica dell'omologia). *Se $f : X \to Y$ è un omeomorfismo tra due spazi topologici, allora $f_{*,p} : H_p(X) \to H_p(Y)$ è un isomorfismo per ogni $p \in \mathbb{Z}$.*

Dim. Per ipotesi esiste l'omeomorfismo $g : Y \to X$ inverso di f, da cui, per la Proposizione 1.14, $g_{*,p} \circ f_{*,p} = (g \circ f)_{*,p} = (\mathrm{Id}_X)_{*,p} = \mathrm{Id}_{H_p(X)}$ ed analogamente $f_{*,p} \circ g_{*,p} = \mathrm{Id}_{H_p(Y)}$. ■

Mostreremo ora alcune proprietà semplici, ma utili, dell'omologia.

Proposizione 1.16. *Sia X uno spazio topologico, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ la famiglia delle componenti connesse per archi di X e $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow X$ l'inclusione. Allora, per ogni $p \in \mathbb{Z}$, c'è un isomorfismo*

$$\bigoplus_{\alpha \in A} H_p(X_\alpha) \stackrel{\oplus (i_\alpha)_{*,p}}{\longrightarrow} H_p(X).$$

Dim. Sia $p \geq 0$. Se $\sigma : \Delta_p \to X$ è un p-simplesso singolare in X allora, dato che $\sigma(\Delta_p)$ è connesso per archi, esiste un $\alpha \in A$ tale che $\sigma(\Delta_p) \subseteq X_\alpha$. Questo dimostra che

$$\bigoplus_{\alpha \in A} C_p(X_\alpha) \stackrel{\oplus (i_\alpha)_{\#,p}}{\longrightarrow} C_p(X)$$

è un isomorfismo e la conclusione è lasciata al lettore per esercizio. ■

Proposizione 1.17 (0-omologia). *Sia X uno spazio topologico e sia $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ la famiglia delle componenti connesse per archi di X. Allora $H_0(X)$ è il gruppo abeliano libero generato da un punto $p_\alpha \in X_\alpha$ per ogni $\alpha \in A$ (cioè $H_0(X) \cong \bigoplus_{\alpha \in A} \mathbb{Z} p_\alpha$).*

Dim. Per la Proposizione 1.16 possiamo assumere che X è connesso per archi. Consideriamo l'omomorfismo grado $\deg : Z_0(X) \to \mathbb{Z}$ definito da $\deg(\sum_{i=1}^s n_i x_i) = \sum_{i=1}^s n_i$. Allora $\deg$ è chiaramente suriettivo e mostriamo che $\operatorname{Ker} \deg = B_0(X)$. Se σ è un 1-simplesso si ha $\deg(\partial_1(\sigma)) = \deg(\sigma(1) - \sigma(0)) = 0$, da cui, per linearità, $B_0(X) \subseteq \operatorname{Ker} \deg$. Invece se $c = \sum_{i=1}^s n_i x_i \in \operatorname{Ker} \deg$ si ha $\sum_{i=1}^s n_i = 0$. Sia $x_0 \in X$ e sia, per ogni $i \in \{1, \ldots, s\}$, $\gamma_i : I \to X$ un arco tale che $\gamma_i(0) = x_0$, $\gamma_i(1) = x_i$. Allora $\partial_1(\sum_{i=1}^s n_i \gamma_i) = \sum_{i=1}^s n_i \partial_1(\gamma_i) = \sum_{i=1}^s n_i(\gamma_i(1) - \gamma_i(0)) = \sum_{i=1}^s n_i(x_i - x_0) = \sum_{i=1}^s n_i x_i - \sum_{i=1}^s n_i x_0 = c$, da cui $c \in B_0(X)$. Infine il Teorema dell'omomorfismo di gruppi mostra che $H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X) \cong Z_0(X)/\operatorname{Ker} \deg \cong \mathbb{Z}$ ed un generatore è uno 0-ciclo di grado 1, quindi possiamo scegliere un punto per generatore. ■

Proposizione 1.18 (Omologia del punto). *Sia $\{x\}$ lo spazio topologico costituito da un unico punto. Allora*

$$H_p(\{x\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } p = 0 \\ \{0\} & \text{se } p \neq 0 \end{cases}.$$

Dim. Il caso $p = 0$ segue dalla Proposizione 1.17. Sia ora $p \geq 1$ e sia $\sigma_p : \Delta_p \to \{x\}$ l'unico p-simplesso del punto. In particolare, per ogni applicazione faccia $F_{i,p}$, si ha $\sigma_p \circ F_{i,p} = \sigma_{p-1}$. Allora $C_p(\{x\}) = \mathbb{Z}\sigma_p$ e

$$\partial_p(\sigma_p) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \sigma_p \circ F_{i,p} = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \sigma_{p-1} = \begin{cases} 0 & \text{se p è dispari} \\ \sigma_{p-1} & \text{se p è pari} \end{cases}.$$

Ne segue $Z_p(\{x\}) \cong \begin{cases} C_p(\{x\}) & \text{se p è dispari} \\ \{0\} & \text{se p è pari} \end{cases}$ e $B_p(\{x\}) \cong \begin{cases} C_p(\{x\}) & \text{se p è dispari} \\ \{0\} & \text{se p è pari} \end{cases}$ e questo mostra la Proposizione. ■

2. Invarianza omotopica dell'omologia

L'invarianza omotipica è conseguenza del seguente risultato che mostra che applicazioni continue omotopicamente equivalenti determinano *lo stesso omomorfismo in omologia.*

Teorema 2.1. *Siano $f_0 : X \to Y$ ed $f_1 : X \to Y$ due applicazioni continue tra due spazi topologici. Se f_0 ed f_1 sono omotopicamente equivalenti allora, per ogni $p \in \mathbb{Z}$, si ha che $(f_0)_{*,p} = (f_1)_{*,p} : H_p(X) \to H_p(Y)$.*

Corollario 2.2 (Invarianza omotopica dell'omologia). *Siano X ed Y due spazi topologici omotopicamente equivalenti. Allora $H_p(X) \cong H_p(Y)$ per ogni $p \in \mathbb{Z}$.*

Dim. La dimostrazione è lasciata al lettore per esercizio. ■

Corollario 2.3. *Se X è uno spazio topologico contraibile si ha $H_p(X) = \{0\}$ per ogni $p \in \mathbb{Z}, p \neq 0$.*

Dim. Immediata applicazione del Corollario 2.2 e della Proposizione 1.18. ■

Dimostrazione del Teorema 2.1. Supponiamo $p \geq 0$ ed iniziamo dimostrando che il teorema seguirà dal caso speciale in cui $Y = X \times I$, $f_0 = i_0 : X \to X \times I$ definita da $i_0(x) = (x, 0)$ e $f_1 = i_1 : X \to X \times I$ definita da $i_1(x) = (x, 1)$ (che sono ovviamente omotopicamente equivalenti).
Infatti, nel caso generale, siano $f_0 : X \to Y$ ed $f_1 : X \to Y$ due applicazioni continue e sia $F : X \times I \to Y$ un'omotopia tra f_0 ed f_1. Allora, per ogni $x \in X$, si ha $F \circ i_0(x) = F(x, 0) = f_0(x)$, cioè $F \circ i_0 = f_0$ ed analogamente $F \circ i_1 = f_1$. Il caso speciale allora implica che $(i_0)_{*,p} = (i_1)_{*,p}$ da cui $(f_0)_{*,p} = (F \circ i_0)_{*,p} = F_{*,p} \circ (i_0)_{*,p} = F_{*,p} \circ (i_1)_{*,p} = (F \circ i_1)_{*,p} = (f_1)_{*,p}$.
Ora passiamo alla dimostrazione del caso speciale.
L'idea, che verrà usata anche in seguito, è di introdurre un opportuno omomorfismo, detto *operatore di omotopia*, $h_p : C_p(X) \to C_{p+1}(X \times I)$ tale che, per ogni $p \in \mathbb{Z}$, vale la

$$(*) \qquad h_{p-1} \circ \partial_p + \partial_{p+1} \circ h_p = (i_1)_{\#,p} - (i_0)_{\#,p}.$$

È facile vedere che tale identità implica il caso speciale: se $c \in Z_p(X)$ si ha

$$(i_1)_{\#,p}(c) - (i_0)_{\#,p}(c) = h_{p-1}(\partial_p(c)) + \partial_{p+1}(h_p(c)) = \partial_{p+1}(h_p(c)) \in B_p(Y),$$

da cui

$$(i_1)_{*,p}(c + B_p(X)) = (i_1)_{\#,p}(c) + B_p(Y) = (i_0)_{\#,p}(c) + B_p(Y) = (i_0)_{*,p}(c + B_p(X)).$$

Iniziamo allora con il definire h_p. Se $p < 0$ poniamo $h_p = 0$ mentre, se $p \geq 0$ consideriamo i p-simplessi $\Delta_p \times \{0\}$ e $\Delta_p \times \{1\}$ in $\mathbb{R}^{p+1}$ generati rispettivamente da $E'_i = (E_i, 0)$ e $E''_i = (E_i, 1)$, $0 \leq i \leq p$, dove gli E_i sono i vettori che generano il p-simplesso standard. Per $i \in \{0, \ldots, p\}$, sia

$$G_{i,p} : \Delta_{p+1} \to \Delta_p \times I$$

l'applicazione univocamente definita, estendendo per linearità, da

$$G_{i,p}(E_0) = E'_0, \ldots, G_{i,p}(E_i) = E'_i, G_{i,p}(E_{i+1}) = E''_i, \ldots, G_{i,p}(E_{p+1}) = E''_p.$$

Ora, per ogni p-simplesso $\sigma : \Delta_p \to X$, si ha che $\sigma \times \mathrm{Id}_I : \Delta_p \times I \to X \times I$ è continua e quindi $(\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{i,p} : \Delta_{p+1} \to X \times I$ è un $(p+1)$-simplesso e possiamo definire

$$h_p(\sigma) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{i,p}$$

ed estendere poi per linearità a $C_p(X)$. Per mostrare $(*)$ osserviamo prima che, se $p \geq 1$, per ogni $j \in \{1, \ldots, p\}$ valgono le identità (la cui verifica è lasciata al lettore per esercizio):

$$(**) \quad G_{j,p} \circ F_{j,p+1} = G_{j-1,p} \circ F_{j,p+1} \text{ e } (F_{j,p} \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{i,p-1} = \begin{cases} G_{i+1,p} \circ F_{j,p+1} & \text{se } i \geq j \\ G_{i,p} \circ F_{j+1,p+1} & \text{se } i < j \end{cases}.$$

Ora per $p \geq 1$ calcoliamo,

$$h_{p-1}(\partial_p(\sigma)) = h_{p-1}(\sum_{j=0}^{p} (-1)^j \sigma \circ F_{j,p}) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j h_{p-1}(\sigma \circ F_{j,p}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i ((\sigma \circ F_{j,p}) \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{i,p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{p} (-1)^{i+j} (\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ (F_{j,p} \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{i,p-1}$$

e, usando la seconda identità in $(**)$, si ha

$$h_{p-1}(\partial_p(\sigma)) = \sum_{0 \leq j \leq i \leq p-1} (-1)^{i+j} (\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{i+1,p} \circ F_{j,p+1} + \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} (\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{i,p} \circ F_{j+1,p+1}$$

Invece

$$\partial_{p+1}(h_p(\sigma)) = \partial_{p+1}(\sum_{i=0}^{p} (-1)^i (\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{i,p}) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \partial_{p+1}((\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{i,p}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j (\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{i,p} \circ F_{j,p+1} = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^{i+j} (\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{i,p} \circ F_{j,p+1} =$$

$$= \sum_{0 \leq i < j-1 < j \leq p+1} (-1)^{i+j} (\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{i,p} \circ F_{j,p+1} - \sum_{j=1}^{p+1} (\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{j-1,p} \circ F_{j,p+1} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{p} (\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{j,p} \circ F_{j,p+1} + \sum_{0 \leq j < i \leq p} (-1)^{i+j} (\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{i,p} \circ F_{j,p+1}.$$

dove la seconda sommatoria corrisponde al caso $i = j - 1$ e la terza sommatoria al caso $i = j$ della riga precedente. Operando la sostituzione $i' = i - 1$ nella quarta sommatoria quest'ultima diventa

$$\sum_{0 \leq j \leq i' \leq p-1} (-1)^{i'+1+j} (\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{i'+1,p} \circ F_{j,p+1}.$$

mentre operando la sostituzione $j' = j - 1$ nella prima sommatoria quest'ultima diventa

$$\sum_{0 \leq i < j' \leq p} (-1)^{i+j'+1} (\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{i,p} \circ F_{j'+1,p+1}$$

Le due sommatorie così ottenute sono esattamente l'opposto delle due sommatorie presenti in $h_{p-1}(\partial_p(\sigma))$. Pertanto

$$h_{p-1} \circ \partial_p(\sigma) + \partial_{p+1} \circ h_p(\sigma) = -\sum_{j=1}^{p+1} (\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{j-1,p} \circ F_{j,p+1} + \sum_{j=0}^{p} (\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{j,p} \circ F_{j,p+1}$$

e, usando la prima identità in $(**)$, si deduce

$$h_{p-1} \circ \partial_p(\sigma) + \partial_{p+1} \circ h_p(\sigma) = -(\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{p,p} \circ F_{p+1,p+1} + (\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{0,p} \circ F_{0,p+1}.$$

Inoltre è facile vedere che tale identità vale anche per $p = 0$. Allora, per concludere, occorrerà mostrare che, per ogni $p \geq 0$, si ha $(i_1)_{\#,p}(\sigma) = (\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{0,p} \circ F_{0,p+1}$ e $(i_0)_{\#,p}(\sigma) = (\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{p,p} \circ F_{p+1,p+1}$. Per verificare ciò osserviamo prima che $G_{p,p} \circ F_{p+1,p+1}(E_i) = G_{p,p}(E_i) = E_i'$, da cui, per ogni $u = \sum_{i=0}^{p} t_i E_i \in \Delta_p$ si ha

$$G_{p,p} \circ F_{p+1,p+1}(u) = G_{p,p} \circ F_{p+1,p+1}(\sum_{i=0}^{p} t_i E_i) = \sum_{i=0}^{p} t_i E_i' = (\sum_{i=0}^{p} t_i E_i, 0) = (u, 0)$$

e quindi $(\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{p,p} \circ F_{p+1,p+1}(u) = (\sigma \times \mathrm{Id}_I)((u,0)) = (\sigma(u), 0) = i_0(\sigma(u)) = (i_0)_{\#,p}(\sigma)(u)$. Questo dimostra che $(i_0)_{\#,p}(\sigma) = (\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{p,p} \circ F_{p+1,p+1}$. Analogamente si dimostra che $(i_1)_{\#,p}(\sigma) = (\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ G_{0,p} \circ F_{0,p+1}$ ed è pertanto conclusa la dimostrazione di $(*)$ e del teorema. ∎

3. Omologia e gruppo fondamentale

Sia X uno spazio topologico connesso per archi e sia $x_0 \in X$. Se $\alpha : I \to X$ è un cappio di base x_0 allora, come abbiamo già visto (Esempio 1.7), α è anche un 1-ciclo e pertanto c'è un'applicazione naturale

$$\varphi : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$$

ottenuta ponendo $\varphi([\alpha]) = \alpha + B_1(X)$. In questo paragrafo studieremo questa applicazione (che vedremo essere un omomorfismo), detta *omomorfismo di Poincaré*, iniziando dal mostrare che è ben definita.

Lemma 3.1. *Sia X uno spazio topologico connesso per archi, sia $x_0 \in X$ e siano α, β due cappi di base x_0. Se $\alpha \sim \beta$ allora α è omologo a β.*

Dim. Sia $G : I \times I \to X$ un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra α e β e consideriamo l'applicazione $b : I \times I \to \Delta_2$ definita da $b(x,y) = (x - xy, xy)$. È facile verificare che b è suriettiva ed è iniettiva eccetto che su $\{0\} \times I$, che viene mandato in $(0,0)$. Inoltre Δ_2 ha la topologia quoziente rispetto a b. Ora sia $\sigma : \Delta_2 \to X$ l'applicazione definita da $\sigma(b(s,t)) = G(s,t)$. Notiamo che σ è ben definita dato che $G(0,t)$ è indipendente da t e quindi è definito $\sigma(b(0,t)) = G(0,t)$. Ora σ è continua ed è dunque un 2-simplesso in X. Per ogni $t \in I$ si ha $\sigma \circ F_{0,2}(t) = \sigma(1-t,t) = \sigma(b(1,t)) = G(1,t) = G(1,0) = \alpha(0) = x_0 = c_{x_0}(t)$, $\sigma \circ F_{1,2}(t) = \sigma(0,t) = \sigma(b(t,1)) = G(t,1) = \beta(t)$ e $\sigma \circ F_{2,2}(t) = \sigma(t,0) = \sigma(b(t,0)) = G(t,0) = \alpha(t)$. Allora $\partial_2(\sigma) = \sigma \circ F_{0,2} - \sigma \circ F_{1,2} + \sigma \circ F_{2,2} = c_{x_0} - \beta + \alpha$. Dato che $c_{x_0} = \partial_2(\sigma_0)$, dove $\sigma_0 : \Delta_2 \to X$ è il 2-simplesso costante x_0, deduciamo che $\alpha - \beta \in B_1(X)$, cioè che α è omologo a β. ■

Prima di dimostrare il risultato che lega il gruppo fondamentale con la 1-omologia, ricordiamo alcune definizioni di teoria dei gruppi.

DEFINIZIONE 3.2. *Sia G un gruppo moltiplicativo. Il sottogruppo dei commutatori di G, denotato con $[G,G]$, è il sottogruppo generato da tutti gli elementi di G del tipo $ghg^{-1}h^{-1}$ per ogni $g,h \in G$. L'abelianizzato di G è il gruppo quoziente $Ab(G) = G/[G,G]$.*

Useremo in seguito il fatto che $[G,G]$ è il più piccolo sottogruppo normale di G a quoziente abeliano, cioè, se N è un sottogruppo normale di G tale che G/N è abeliano, allora $[G,G] \subseteq N$.

TEOREMA 3.3. *Sia X uno spazio topologico connesso per archi e sia $x_0 \in X$. L'omomorfismo di Poincaré*

$$\varphi : \pi_1(X,x_0) \to H_1(X)$$

è suriettivo ed ha per nucleo il sottogruppo dei commutatori $[\pi_1(X,x_0), \pi_1(X,x_0)]$. In particolare $H_1(X) \cong Ab(\pi_1(X,x_0))$.

Dim. Dato un arco $\alpha : I \to X$ sappiamo che $\alpha \in C_1(X)$. Denoteremo la sua classe modulo bordi $\alpha + B_1(X)$ con $[\alpha]_H$. Con questa notazione abbiamo $\varphi([\alpha]) = [\alpha]_H$. La dimostrazione verrà divisa in passi che verranno dimostrati uno ad uno.
Primo passo: per ogni arco $\alpha : I \to X$ si ha $[\alpha^o]_H = -[\alpha]_H$.
Sia $\sigma : \Delta_2 \to X$ il 2-simplesso definito da $\sigma(x,y) = \alpha(x)$. Allora, come nella dimostrazione del Lemma 3.1, si ha, per ogni $t \in I$, $\sigma \circ F_{0,2}(t) = \sigma(1-t,t) = \alpha(1-t) = \alpha^o(t), \sigma \circ F_{1,2}(t) = \sigma(0,t) = \alpha(0)$ e $\sigma \circ F_{2,2}(t) = \sigma(t,0) = \alpha(t)$, da cui $\partial_2(\sigma) = \alpha^o - c_{\alpha(0)} + \alpha$. Pertanto $\alpha^o = -\alpha + \partial_2(\sigma + \sigma_0)$ dove $\sigma_0 : \Delta_2 \to X$ è il 2-simplesso costante $\alpha(0)$. Questo dimostra il primo passo.
Secondo passo: per ogni coppia di archi $\alpha : I \to X$, $\beta : I \to X$ tali che $\alpha(1) = \beta(0)$ si ha $[\alpha * \beta]_H = [\alpha]_H + [\beta]_H$. In particolare φ è un omomorfismo.
Sia $\sigma : \Delta_2 \to X$ il 2-simplesso definito da

$$\sigma(x,y) = \begin{cases} \alpha(y-x+1) & \text{se } y \leq x \\ \beta(y-x) & \text{se } y \geq x \end{cases}.$$

Come sopra si ha $\sigma \circ F_{0,2}(t) = \sigma(1-t,t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{se } t \geq \frac{1}{2} \end{cases} = \alpha * \beta(t), \sigma \circ F_{1,2}(t) = \sigma(0,t) = \beta(t)$ e $\sigma \circ F_{2,2}(t) = \sigma(t,0) = \alpha(1-t) = \alpha^o(t)$, da cui $\partial_2(\sigma) = \alpha * \beta - \beta + \alpha^o$. Usando il primo passo deduciamo $[\alpha * \beta]_H = [\beta]_H - [\alpha^o]_H = [\alpha]_H + [\beta]_H$. Ovviamente ora, dati due

cappi $\alpha : I \to X$, $\beta : I \to X$ di base x_0 si ottiene $\varphi([\alpha][\beta]) = \varphi([\alpha * \beta]) = [\alpha]_H + [\beta]_H = \varphi([\alpha]) + \varphi([\beta])$, mostrando che φ è un omomorfismo.
Terzo passo: φ è suriettiva.
Per ogni $x \in X$ scegliamo un arco $\gamma_x : I \to X$ tale che $\gamma_x(0) = x_0, \gamma_x(1) = x$ e $\gamma_{x_0} = c_{x_0}$ è il cappio costante. Questo ci permette di definire un omomorfismo $\gamma : C_0(X) \to C_1(X)$ ponendo $\gamma(x) = \gamma_x$ ed estendendo per linearità. Per ogni arco (o 1-simplesso) $\sigma : I \to X$ definiamo il cappio di base x_0

$$\widetilde{\sigma} = \gamma_{\sigma(0)} * \sigma * (\gamma_{\sigma(1)})^o$$

ed osserviamo che $\gamma(\partial_1(\sigma)) = \gamma(\sigma(1) - \sigma(0)) = \gamma_{\sigma(1)} - \gamma_{\sigma(0)}$. Ora, usando secondo e primo passo,

$$\varphi([\widetilde{\sigma}]) = [\widetilde{\sigma}]_H = [\gamma_{\sigma(0)} * \sigma * (\gamma_{\sigma(1)})^o]_H = [\gamma_{\sigma(0)}]_H + [\sigma]_H - [\gamma_{\sigma(1)}]_H = [\sigma]_H - [\gamma(\partial_1(\sigma))]_H.$$

Per ogni cappio ϕ di base x_0 poniamo, se $n \geq 1$, $\phi^n = \phi * \ldots * \phi$ prodotto n volte e se $n \leq -1$, $\phi^n = (\phi^o)^{-n}$. Ora sia $c = \sum_{i=1}^{m} n_i\sigma_i \in C_1(X)$ e sia $\alpha = \widetilde{\sigma}_1^{n_1} * \ldots * \widetilde{\sigma}_m^{n_m}$. Allora, usando il secondo passo ed il calcolo di $\varphi([\widetilde{\sigma}])$, si ha

$$\begin{aligned}\varphi([\alpha]) &= \varphi([\widetilde{\sigma}_1^{n_1}] \ldots [\widetilde{\sigma}_m^{n_m}]) = \sum_{i=1}^{m} n_i\varphi([\widetilde{\sigma}_i]) = \sum_{i=1}^{m} n_i([\sigma_i]_H - [\gamma(\partial_1(\sigma_i))]_H) = \\ &= [\sum_{i=1}^{m} n_i\sigma_i]_H - [\gamma(\partial_1(\sum_{i=1}^{m} n_i\sigma_i))]_H = [c]_H - [\gamma(\partial_1(c))]_H.\end{aligned}$$

Infine se $c \in Z_1(X)$ si ha, ovviamente, $\varphi([\alpha]) = [c]_H$ e quindi φ è suriettiva.
Quarto passo: $[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$.
Per il terzo passo ed il teorema dell'omomorfismo tra gruppi si ha $\pi_1(X, x_0)/\operatorname{Ker}\varphi \cong H_1(X)$ che è abeliano, dunque $[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$.
Prima di enunciare il quinto passo sia $P = Ab(\pi_1(X, x_0)) = \pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$ e, per ogni cappio $\alpha : I \to X$ di base x_0 poniamo $[\alpha]_P = [\alpha] + [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] \in P$. Se $\sigma : I \to X$ è un 1-simplesso poniamo $\beta(\sigma) = [\widetilde{\sigma}]_P$. Osservando che P è un gruppo abeliano, è allora definito un omomorfismo $\beta : C_1(X) \to P$ ponendo

$$\beta(\sum_{i=1}^{m} n_i\sigma_i) = \prod_{i=1}^{m} \beta(\sigma_i)^{n_i}.$$

Quinto passo: $B_1(X) \subseteq \operatorname{Ker}\beta$.
Sia $\sigma : \Delta_2 \to X$ un 2-simplesso e siano, per $0 \leq i \leq 2$, $v_i = \sigma(E_i)$ e $\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_{i,2}$, in modo che $\partial_2(\sigma) = \sigma^{(0)} - \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}$. Osserviamo intanto che il cappio $\sigma^{(0)} * (\sigma^{(1)})^o * \sigma^{(2)}$ è equivalente al cappio costante c_{v_1}: sia $F : I \times I \to X$ definita da

$$F(s,t) = \begin{cases} \sigma(t + (1-t)(1-2s), 2s(1-t)) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(t(2-2s), (1-t)(2-2s)) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Allora F è continua dato che, per $s = \frac{1}{2}$ entrambe le funzioni nella definizione di F sono $\sigma(t, 1-t)$; inoltre

$$F(s,0) = \begin{cases} \sigma(1-2s, 2s) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(0, 2-2s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = \sigma^{(0)} * (\sigma^{(1)})^o(s),$$

$$F(s,1) = \begin{cases} \sigma(1,0) = v_1 & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2-2s,0) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = c_{v_1} * (\sigma^{(2)})^o(s)$$

ed infine $F(0,t) = \sigma(1,0)$ e $F(1,t) = \sigma(0,0)$ sono indipendenti da t. Allora $\sigma^{(0)} * (\sigma^{(1)})^o \sim c_{v_1} * (\sigma^{(2)})^o$ e, di conseguenza, $\sigma^{(0)} * (\sigma^{(1)})^o * \sigma^{(2)} \sim c_{v_1}$.
Ora calcoliamo

$$\begin{aligned} \beta(\partial_2(\sigma)) &= \beta(\sigma^{(0)})\beta(\sigma^{(1)})^{-1}\beta(\sigma^{(2)}) = [\widetilde{\sigma^{(0)}}]_P[\widetilde{\sigma^{(1)}}]_P^{-1}[\widetilde{\sigma^{(2)}}]_P = [\widetilde{\sigma^{(0)}} * \widetilde{\sigma^{(1)}}^o * \widetilde{\sigma^{(2)}}]_P = \\ &= [\gamma_{v_1} * \sigma^{(0)} * (\gamma_{v_2})^o * \gamma_{v_2} * (\sigma^{(1)})^o * (\gamma_{v_0})^o * \gamma_{v_0} * \sigma^{(2)} * (\gamma_{v_1})^o]_P = \\ &= [\gamma_{v_1} * \sigma^{(0)} * (\sigma^{(1)})^o * \sigma^{(2)} * (\gamma_{v_1})^o]_P = [\gamma_{v_1} * c_{v_1} * (\gamma_{v_1})^o]_P = [\gamma_{v_1} * (\gamma_{v_1})^o]_P = \\ &= [c_{x_0}]_P = 1_P \end{aligned}$$

da cui $\partial_2(\sigma) \in \operatorname{Ker}\beta$ e quindi $B_1(X) \subseteq \operatorname{Ker}\beta$.
Sesto passo: Per ogni $[\alpha] \in \operatorname{Ker}\varphi$ si ha $\beta(\alpha) = 1_P$.
Se $[\alpha] \in \operatorname{Ker}\varphi$ si ha $[\alpha]_H = 0$, cioè $\alpha \in B_1(X)$ da cui $\beta(\alpha) = 1_P$ per il quinto passo.
Settimo passo: $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq [\pi_1(X,x_0), \pi_1(X,x_0)]$.
Se $[\alpha] \in \operatorname{Ker}\varphi$ allora $\beta(\alpha) = 1_P$ per il sesto passo. Ma $\beta(\alpha) = [\widetilde{\alpha}]_P = [\gamma_{\alpha(0)} * \alpha * (\gamma_{\alpha(1)})^o]_P = [\gamma_{x_0} * \alpha * (\gamma_{x_0})^o]_P = [c_{x_0} * \alpha * (c_{x_0})^o]_P = [\alpha]_P$. Pertanto $[\alpha]_P = 1_P$, cioè $[\alpha] \in [\pi_1(X,x_0), \pi_1(X,x_0)]$. ∎

Il teorema appena dimostrato ci permette di calcolare alcuni gruppi di omologia.

Corollario 3.4.
(i) $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.
(ii) $H_1(S^n) = \{0\}$ *per ogni* $n \geq 2$.
(iii) $H_1(g\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ *per ogni* $g \geq 1$.

Dim. Basta applicare il Teorema 3.3 ricordando che $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}, \pi_1(S^n) = \{0\}$ per ogni $n \geq 2$ e che il gruppo fondamentale del g-toro $\pi_1(g\mathbb{T})$ è generato da $\beta_1, \gamma_1, \ldots, \beta_g, \gamma_g$ con la relazione $\beta_1\gamma_1\beta_1^{-1}\gamma_1^{-1} \ldots \beta_g\gamma_g\beta_g^{-1}\gamma_g^{-1} = 1$. ∎

4. Algebra Omologica

Il prossimo obiettivo sarà il calcolo dell'omologia di uno spazio topologico del quale si conosce l'omologia di due aperti che lo ricoprono. Per enunciare ed utilizzare i risultati in maniera efficace occorre introdurre alcuni concetti di algebra omologica.

Definizione 4.1. *Un* **complesso di gruppi abeliani ed omomorfismi** *è una successione, denotata con C_* (o (C_*, φ_*)),*

$$\ldots \to C_{p+1} \xrightarrow{\varphi_{p+1}} C_p \xrightarrow{\varphi_p} C_{p-1} \xrightarrow{\varphi_{p-1}} C_{p-2} \to \ldots$$

di gruppi abeliani C_p ed omomorfismi $\varphi_p : C_p \to C_{p-1}$ tali che $\varphi_p \circ \varphi_{p+1} = 0$ per ogni $p \in \mathbb{Z}$. Una **successione esatta di gruppi abeliani ed omomorfismi** *è un complesso di gruppi abeliani ed omomorfismi (C_*, φ_*) tale che* $\operatorname{Ker}\varphi_p = \operatorname{Im}\varphi_{p+1}$ *per ogni $p \in \mathbb{Z}$. Il* **p-esimo gruppo di omologia di un complesso** (C_*, φ_*) *è* $H_p(C_*) = \operatorname{Ker}\varphi_p / \operatorname{Im}\varphi_{p+1}$.
Un **morfismo** $F_* : C_* \to D_*$ *tra due complessi (C_*, φ_*) e (D_*, ψ_*) è una successione di*

omomorfismi $F_p : C_p \to D_p$ *tali che i diagrammi*

$$\begin{array}{ccc} C_p & \xrightarrow{F_p} & D_p \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_p} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_p} \\ C_{p-1} & \xrightarrow{F_{p-1}} & D_{p-1} \end{array}$$

sono commutativi, cioè $\psi_p \circ F_p = F_{p-1} \circ \varphi_p$ *per ogni* $p \in \mathbb{Z}$.

Esempio 4.2.
Sia X uno spazio topologico. Il complesso delle catene singolari di X è $(C_*(X), \partial_*)$ dove $C_p(X)$ è il gruppo delle p-catene singolari di X e $\partial_p : C_p(X) \to C_{p-1}(X)$ è il p-esimo operatore di bordo. Ovviamente $H_p(C_*(X)) = H_p(X)$. Analogamente se $f : X \to Y$ è un'applicazione continua tra due spazi topologici, allora f definisce un morfismo di complessi $f_\# : C_*(X) \to C_*(Y)$ per il Lemma 1.12.

Osservazione 4.3.
Un morfismo $F_* : C_* \to D_*$ *tra due complessi* (C_*, φ_*) *e* (D_*, ψ_*) *induce un morfismo*

$$F_{*,p} : H_p(C_*) \to H_p(D_*)$$

definito, per ogni $c \in \operatorname{Ker} \varphi_p$, da

$$F_{*,p}(c + \operatorname{Im} \varphi_{p+1}) = F_p(c) + \operatorname{Im} \psi_{p+1} \in \operatorname{Ker} \psi_p / \operatorname{Im} \psi_{p+1} = H_p(D_*) :$$

infatti $F_p(c) \in \operatorname{Ker} \psi_p$ dato che $\psi_p(F_p(c)) = F_{p-1}(\varphi_p(c)) = F_{p-1}(0) = 0$ e se $c \in \operatorname{Im} \varphi_{p+1}$ allora $c = \varphi_{p+1}(b)$ per qualche $b \in C_{p+1}$ e quindi $F_p(c) = F_p(\varphi_{p+1}(b)) = \psi_{p+1}(F_{p+1}(c)) \in \operatorname{Im} \psi_{p+1}$ e quindi $F_{*,p}$ è ben definita.

Definizione 4.4. *Una successione di complessi*

$$0 \to C_* \xrightarrow{F_*} D_* \xrightarrow{G_*} E_* \to 0$$

si dice **esatta** *se le successioni* $0 \to C_p \xrightarrow{F_p} D_p \xrightarrow{G_p} E_p \to 0$ *sono esatte per ogni* $p \in \mathbb{Z}$ *(cioè* F_p *è iniettiva,* G_p *è suriettiva e* $\operatorname{Im} F_p = \operatorname{Ker} G_p$ *per ogni* $p \in \mathbb{Z}$*).*

Il risultato seguente, seppur molto semplice, è probabilmente uno dei più importanti dell'algebra omologica.

Lemma 4.5. *Sia* $0 \to C_* \xrightarrow{F_*} D_* \xrightarrow{G_*} E_* \to 0$ *una successione esatta di complessi. Per ogni* $p \in \mathbb{Z}$ *c'è un omomorfismo* $\delta_p : H_p(E_*) \to H_{p-1}(C_*)$ *tale che c'è una successione esatta di omologia*

$$\ldots \to H_p(C_*) \xrightarrow{F_{*,p}} H_p(D_*) \xrightarrow{G_{*,p}} H_p(E_*) \xrightarrow{\delta_p} H_{p-1}(C_*) \xrightarrow{F_{*,p-1}} H_{p-1}(D_*) \xrightarrow{G_{*,p-1}} H_{p-1}(E_*) \xrightarrow{\delta_{p-1}} H_{p-2}(C_*) \ldots$$

Dim. Iniziamo definendo δ_p con la classica caccia al diagramma: consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_{p+1} \arrow[r, "F_{p+1}"] \arrow[d, "\varphi_{p+1}"] & D_{p+1} \arrow[r, "G_{p+1}"] \arrow[d, "\psi_{p+1}"] & E_{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "\chi_{p+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_p \arrow[r, "F_p"] \arrow[d, "\varphi_p"] & D_p \arrow[r, "G_p"] \arrow[d, "\psi_p"] & E_p \arrow[r] \arrow[d, "\chi_p"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{p-1} \arrow[r, "F_{p-1}"] \arrow[d, "\varphi_{p-1}"] & D_{p-1} \arrow[r, "G_{p-1}"] \arrow[d, "\psi_{p-1}"] & E_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "\chi_{p-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{p-2} \arrow[r, "F_{p-2}"] & D_{p-2} \arrow[r, "G_{p-2}"] & E_{p-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

nel quale le righe sono esatte e le colonne sono complessi. Sia ora $e \in \operatorname{Ker} \chi_p$. Dato che G_p è suriettiva c'è $d \in D_p$ tale che $G_p(d) = e$. Ora $G_{p-1}(\psi_p(d)) = \chi_p(G_p(d)) = \chi_p(e) = 0$, quindi $\psi_p(d) \in \operatorname{Ker} G_{p-1} = \operatorname{Im} F_{p-1}$ e quindi esiste un'unico (F_{p-1} è iniettiva!) $c \in C_{p-1}$ tale che $\psi_p(d) = F_{p-1}(c)$. Inoltre $F_{p-2}(\varphi_{p-1}(c)) = \psi_{p-1}(F_{p-1}(c)) = \psi_{p-1}(\psi_p(d)) = 0$ ed essendo F_{p-2} iniettiva, ne deduciamo che $\varphi_{p-1}(c) = 0$, cioè $c \in \operatorname{Ker} \varphi_{p-1}$. Poniamo allora

$$\delta_p(e + \operatorname{Im} \chi_{p+1}) = c + \operatorname{Im} \varphi_p \in \operatorname{Ker} \varphi_{p-1} / \operatorname{Im} \varphi_p = H_{p-1}(C_*).$$

Ora verifichiamo che δ_p è ben definita. Se $d' \in D_p$ è tale che $G_p(d') = e$ allora $d' - d \in \operatorname{Ker} G_p = \operatorname{Im} F_p$, quindi esiste $c' \in C_p$ tale che $F_p(c') = d' - d$. Allora $\psi_p(d' - d) = \psi_p(F_p(c')) = F_{p-1}(\varphi_p(c'))$ da cui $\psi_p(d') = \psi_p(d) + F_{p-1}(\varphi_p(c')) = F_{p-1}(c + \varphi_p(c'))$. Quindi scegliendo d' invece di d abbiamo ottenuto $c + \varphi_p(c')$ e ovviamente $c + \varphi_p(c') + \operatorname{Im} \varphi_p = c + \operatorname{Im} \varphi_p$. Supponiamo ora che $e \in \operatorname{Im} \chi_{p+1}$. Allora esiste $e' \in E_{p+1}$ tale che $e = \chi_{p+1}(e')$ e scelto $d'' \in D_{p+1}$ tale che $e' = G_{p+1}(d'')$ si ha $G_p(\psi_{p+1}(d'')) = \chi_{p+1}(G_{p+1}(d'')) = \chi_{p+1}(e') = e$ e quindi possiamo scegliere $d = \psi_{p+1}(d'')$. Ma allora $\psi_p(d) = \psi_p(\psi_{p+1}(d'')) = 0 = F_{p-1}(0)$ da cui $c = 0 \in \operatorname{Im} \varphi_p$. Questo mostra che δ_p è ben definita.

È anche facile verificare che δ_p è un omomorfismo, dato che se $e' \in \operatorname{Ker} \chi_p$, $d' \in D_p$ è tale che $G_p(d') = e'$ e $c' \in C_{p-1}$ è tale che $\psi_p(d') = F_{p-1}(c')$ allora $G_p(d + d') = e + e'$ e $\psi_p(d + d') = F_{p-1}(c + c')$, da cui $\delta_p((e + \operatorname{Im} \chi_{p+1}) + (e' + \operatorname{Im} \chi_{p+1})) = \delta_p(e + e' + \operatorname{Im} \chi_{p+1}) = c + c' + \operatorname{Im} \varphi_p = (c + \operatorname{Im} \varphi_p) + (c' + \operatorname{Im} \varphi_p) = \delta_p(e + \operatorname{Im} \chi_{p+1}) + \delta_p(e' + \operatorname{Im} \chi_{p+1})$.

Ora passiamo a verificare l'esattezza della succesione di omologia.

Iniziamo con il provare che $\operatorname{Ker} G_{*,p} = \operatorname{Im} F_{*,p}$. Intanto $G_{*,p}(F_{*,p}(c + \operatorname{Im} \varphi_{p+1})) = G_{*,p}(F_p(c) + \operatorname{Im} \psi_{p+1}) = G_p(F_p(c)) + \operatorname{Im} \chi_{p+1} = 0$, da cui $\operatorname{Im} F_{*,p} \subseteq \operatorname{Ker} G_{*,p}$. Invece se $G_{*,p}(d + \operatorname{Im} \psi_{p+1}) = 0$ allora $G_p(d) \in \operatorname{Im} \chi_{p+1}$, quindi esiste $e \in E_{p+1}$ tale che $G_p(d) = \chi_{p+1}(e)$. Preso $d' \in D_{p+1}$ tale che $G_{p+1}(d') = e$ si ha che $G_p(d - \psi_{p+1}(d')) = G_p(d) - \chi_{p+1}(G_{p+1}(d')) = \chi_{p+1}(e) - \chi_{p+1}(e) = 0$ e pertanto $d - \psi_{p+1}(d') \in \operatorname{Ker} G_p = \operatorname{Im} F_p$ ed esiste $c \in C_p$ tale che $d - \psi_{p+1}(d') = F_p(c)$. Quindi $d + \operatorname{Im} \psi_{p+1} = F_p(c) + \operatorname{Im} \psi_{p+1} = F_{*,p}(c + \operatorname{Im} \varphi_{p+1}) \in \operatorname{Im} F_{*,p}$.

Ora verifichiamo che $\operatorname{Ker} \delta_p = \operatorname{Im} G_{*,p}$. Un elemento di $\operatorname{Im} G_{*,p}$ è del tipo $G_{*,p}(d + \operatorname{Im} \psi_{p+1}) = G_p(d) + \operatorname{Im} \chi_{p+1}$ dove $d \in \operatorname{Ker} \psi_p$ e quindi $\psi_p(d) = 0 = F_{p-1}(0)$ e pertanto $\delta_p(G_{*,p}(d + \operatorname{Im} \psi_{p+1})) = 0 + \operatorname{Im} \varphi_p = 0$. Invece se $e + \operatorname{Im} \chi_{p+1} \in \operatorname{Ker} \delta_p$ allora, per definizione di δ_p, si ha che $c \in \operatorname{Im} \varphi_p$, dove, come sopra, c'è $d \in D_p$ tale che $G_p(d) = e$ e $\psi_p(d) = F_{p-1}(c)$. Ma $c = \varphi_p(c')$ per qualche $c' \in C_p$ e quindi $\psi_p(d) = F_{p-1}(\varphi_p(c')) = \psi_p(F_p(c'))$, da cui $d - F_p(c') \in \operatorname{Ker} \psi_p$ e $G_{*,p}(d - F_p(c') + \operatorname{Im} \psi_{p+1}) = G_p(d) - G_p(F_p(c')) + \operatorname{Im} \chi_{p+1} = e + \operatorname{Im} \chi_{p+1}$.

Infine facciamo vedere che $\operatorname{Im}\delta_p = \operatorname{Ker} F_{*,p-1}$. Un elemento di $\operatorname{Im}\delta_p$ è del tipo $\delta_p(e+\operatorname{Im}\chi_{p+1}) = c + \operatorname{Im}\varphi_p$ dove c'è $d \in D_p$ tale che $G_p(d) = e$ e $c \in C_{p-1}$ tale che $\psi_p(d) = F_{p-1}(c)$. Ma allora $F_{*,p-1}(c+\operatorname{Im}\varphi_p) = F_{p-1}(c)+\operatorname{Im}\psi_p = \psi_p(d)+\operatorname{Im}\psi_p = 0$, da cui $\delta_p(e+\operatorname{Im}\chi_{p+1}) = c+\operatorname{Im}\varphi_p \in \operatorname{Ker} F_{*,p-1}$. Invece se $c+\operatorname{Im}\varphi_p \in \operatorname{Ker} F_{*,p-1}$ si ha $F_{*,p-1}(c+\operatorname{Im}\varphi_p) = F_{p-1}(c)+\operatorname{Im}\psi_p = 0$, da cui $F_{p-1}(c) \in \operatorname{Im}\psi_p$ ed esiste $d \in D_p$ tale che $\psi_p(d) = F_{p-1}(c)$. Allora posto $e = G_p(d) \in E_p$ si ha che $e \in \operatorname{Ker}\chi_p$ dato che $\chi_p(e) = \chi_p(G_p(d)) = G_{p-1}(\psi_p(d)) = G_{p-1}(F_{p-1}(c)) = 0$. Per definizione di δ_p si ottiene $\delta_p(e+\operatorname{Im}\chi_{p+1}) = c+\operatorname{Im}\varphi_p$ e quindi $c+\operatorname{Im}\varphi_p \in \operatorname{Im}\delta_p$. ∎

5. La successione di Maier-Vietoris

Nel corso di GE3 si è visto come, dato uno spazio topologico X e due aperti $U, V \subseteq X$ semplicemente connessi tali che $X = U \cup V$ e $U \cap V$ è connesso per archi, allora anche X è semplicemente connesso. Il prossimo obiettivo sarà un'analogo nel caso dell'omologia.

Teorema 5.1 (Teorema di Maier-Vietoris). *Sia X uno spazio topologico e siano $U, V \subseteq X$ due aperti tali che $X = U \cup V$ e consideriamo le inclusioni*

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook, "j"] & U \arrow[d, hook, "k"] \\ V \arrow[r, hook, "l"] & X. \end{tikzcd}$$

Allora, per ogni $p \in \mathbb{Z}$, c'è un omomorfismo

$$\delta_p : H_p(X) \to H_{p-1}(U \cap V)$$

che da luogo alla seguente succesione esatta di omologia

$$\ldots \to H_{p+1}(X) \xrightarrow{\delta_{p+1}} H_p(U \cap V) \xrightarrow{i_{*,p}\oplus j_{*,p}} H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{k_{*,p}-l_{*,p}} H_p(X) \xrightarrow{\delta_p} H_{p-1}(U \cap V) \to \ldots .$$

Definizione 5.2. *La succesione esatta di omologia del Teorema 5.1 si dice* **successione di Maier-Vietoris**.

Prima di dimostrare il teorema di Maier-Vietoris, a scopo di motivazione, facciamone vedere un'importante applicazione.

Corollario 5.3. *Sia $n \in \mathbb{N}$, allora*

$$H_p(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } p = 0, n \\ \{0\} & \text{se } 0 < p < n \text{ o se } p > n \end{cases}.$$

Dim. Se $p = 0$ sappiamo già che $H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$ per la Proposizione 1.17, mentre, se $p = 1$, sappiamo già che $H_1(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 1 \\ \{0\} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$ per il Corollario 3.4(i) e (ii). Supponiamo dunque $p \geq 2$ e siano $N = (0, \ldots, 0, 1) \in S^n$ e $S = (0, \ldots, 0, -1) \in S^n$. Consideriamo i due aperti $U = S^n - \{N\}$ e $V = S^n - \{S\}$. Come è ben noto (per proiezione stereografica, vedasi per esempio [**S**, Es.5.4(16)]) U e V sono omemomorfi a $\mathbb{R}^n$ mentre $U \cap V$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n - \{(0, \ldots, 0)\}$ che è omotopicamente equivalente a S^{n-1}. Per l'invarianza topologica dell'omologia (Teorema 1.15) ed il Corollario 2.3 si ha $H_q(U) \cong H_q(V) \cong H_q(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ per $q \in \mathbb{Z}, q \geq 1$. La successione di Maier-Vietoris da una successione esatta

$$\{0\} \to H_p(S^n) \to H_{p-1}(U \cap V) \to \{0\}$$

e quindi $H_p(S^n) \cong H_{p-1}(U \cap V) \cong H_{p-1}(S^{n-1})$ per l'invarianza omotopica dell'omologia (Teorema 2.2) per ogni $p \geq 2$ e $n \geq 1$. Se $p > n$, iterando si ottiene, $H_p(S^n) \cong H_{p-1}(S^{n-1}) \cong \ldots \cong H_{p-n}(S^0) = \{0\}$ dato che S^0 consiste di due punti distinti (dove abbiamo anche usato le Proposizioni 1.16 ed 1.18). Se $p = n$, iterando si ottiene, $H_p(S^p) \cong H_{p-1}(S^{p-1}) \cong \ldots \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ per il Corollario 3.4(i), mentre se $0 < p < n$, iterando si ottiene, $H_p(S^n) \cong H_{p-1}(S^{n-1}) \cong \ldots \cong H_1(S^{n-p+1}) = \{0\}$ per il Corollario 3.4(ii) dato che $n - p + 1 \geq 2$. ■

Dimostrazione del Teorema 5.1. Consideriamo i seguenti complessi, come nell'Esempio 4.2, $(C_*(U \cap V), \partial_*)$, $(C_*(X), \partial_*)$ e $(C_*(U) \oplus C_*(V), \partial_* \oplus \partial_*)$ e la successione di complessi

$$0 \to C_*(U \cap V) \xrightarrow{i_\# \oplus j_\#} C_*(U) \oplus C_*(V) \xrightarrow{k_\# - l_\#} C_*(X)$$

che è esatta dato che se $(i_{\#,p} \oplus j_{\#,p})(\sum_\sigma n_\sigma \sigma) = (0,0)$ allora $(\sum_\sigma n_\sigma i \circ \sigma, \sum_\sigma n_\sigma j \circ \sigma) = (0,0)$, quindi $n_\sigma = 0$ per ogni p-simplesso $\sigma : \Delta_p \to U \cap V$ e dunque $i_{\#,p} \oplus j_{\#,p}$ è iniettiva; se $c \in C_p(U \cap V)$ si ha $(k_{\#,p} - l_{\#,p})(i_{\#,p} \oplus j_{\#,p})(c)) = k_{\#,p} \circ i_{\#,p}(c) - l_{\#,p} \circ j_{\#,p}(c) = (k \circ i)_{\#,p}(c) - (l \circ j)_{\#,p}(c) = 0$ dato che $k \circ i = l \circ j$ e infine se $(k_{\#,p} - l_\#)(c, c') = 0$ allora $k_{\#,p}(c) - l_{\#,p}(c') = 0$ e posto $c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma$ dove $\sigma : \Delta_p \to U$ sono p-simplessi in U, $c' = \sum_\tau m_\tau \tau$ dove $\tau : \Delta_p \to V$ sono p-simplessi in V, si ha $\sum_\sigma n_\sigma k \circ \sigma = \sum_\tau m_\tau j \circ \tau$ coincidono come p-catene in X e quindi $k \circ \sigma = j \circ \tau$ e $n_\sigma = m_\tau$ per ogni σ, τ. Ma allora per ogni $x \in \Delta_p$ si ha $\sigma(x) = k(\sigma(x)) = j(\tau(x)) = \tau(x) \in V$, da cui $\operatorname{Im} \sigma \subseteq U \cap V$ ed analogamente $\operatorname{Im} \tau \subseteq U \cap V$. Allora $c = i_{\#,p}(\sum_\sigma n_\sigma \sigma)$ e $c' = j_{\#,p}(\sum_\sigma n_\sigma \sigma)$ e dunque $(c, c') = (i_{\#,p} \oplus j_{\#,p})(\sum_\sigma n_\sigma \sigma) \in \operatorname{Im}(i_{\#,p} \oplus j_{\#,p})$.
È facile osservare che gli omomorfismi $k_{\#,p} - l_{\#,p}$ non possono essere suriettivi dato che la loro immagine contiene solo p-catene i cui p-simplessi hanno immagine in U o in V. Inoltre ogni tale p-catena è ovviamente nell'immagine di $k_{\#,p} - l_{\#,p}$, pertanto, posto $\mathcal{U} = \{U, V\}$ possiamo definire

$$C_p^{\mathcal{U}}(X) = \{\sum_\sigma n_\sigma \sigma \text{ dove } \sigma : \Delta_p \to U \text{ o } \sigma : \Delta_p \to V \quad \text{è un p-simplesso in U o in V}\}$$

che, insieme a ∂_p definisce un complesso, dato che, ovviamente, $\partial_p(c) \in C_{p-1}^{\mathcal{U}}(X)$ per ogni $c \in C_p^{\mathcal{U}}(X)$. Abbiamo dunque una successione esatta di complessi

$$0 \to C_*(U \cap V) \xrightarrow{i_\# \oplus j_\#} C_*(U) \oplus C_*(V) \xrightarrow{k_\# - l_\#} C_*^{\mathcal{U}}(X) \to 0$$

che da luogo, per il Lemma 4.5, ad una successione esatta di omologia

$$\ldots \to H_{p+1}^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\delta_{p+1}} H_p(U \cap V) \xrightarrow{i_{*,p} \oplus j_{*,p}} H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{k_{*,p} - l_{*,p}} H_p^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\delta_p} H_{p-1}(U \cap V) \to \ldots$$

dove $H_p^{\mathcal{U}}(X) = H_p(C_*^{\mathcal{U}}(X))$ è l'omologia del complesso $C_*^{\mathcal{U}}(X)$. Il teorema seguirà ora dal fatto, che vedremo nella Proposizione 5.5, che $H_p^{\mathcal{U}}(X) \cong H_p(X)$ per ogni $p \in \mathbb{Z}$. ■

Premettiamo la

Definizione 5.4. *Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X. Il* **complesso delle p-catene $\mathcal{U}$-piccole** *è il complesso*

$$C_p^{\mathcal{U}}(X) = \{\sum_\sigma n_\sigma \sigma \ \textit{dove} \ \sigma : \Delta_p \to U_i \ \textit{per qualche} \ i \in I\}$$

con omomorfismo ∂_p. L'omologia di tale complesso $H_p(C_*^{\mathcal{U}}(X))$ verrà denotata con $H_p^{\mathcal{U}}(X)$.

PROPOSIZIONE 5.5. *Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X. Allora l'inclusione di complessi $C_*^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_*(X)$ induce un isomorfismo $H_p^{\mathcal{U}}(X) \cong H_p(X)$ per ogni $p \in \mathbb{Z}$.*

L'idea per dimostrare la proposizione è semplice: se $\sigma : \Delta_p \to X$ è un p-simplesso troviamo una p-catena $\mathcal{U}$-piccola omologa a σ suddividendo opportunamente Δ_p.

5.1. Catene affini.

DEFINIZIONE 5.6. *Siano $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, p \geq 0, n \geq 0$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme convesso e siano $v_0, \ldots, v_p \in K$. Il* **p-simplesso di** K **generato da** $v_0, \ldots, v_p$, *denotato con $[v_0, \ldots, v_p]$, è l'applicazione $[v_0, \ldots, v_p] : \Delta_p \to K$ univocamente definita, estendendo per linearità, da*

$$[v_0, \ldots, v_p](E_i) = v_i, 0 \leq i \leq p.$$

Il p-simplesso $[v_0, \ldots, v_p]$ si dice **p-simplesso singolare affine di** K. *Una* **p-catena singolare affine di** K *è una p-catena $\sum_{i=1}^{s} n_i \sigma_i$ dove ogni σ_i è un p-simplesso singolare affine di K. Il gruppo delle p-catene singolari affini di K verrà denotato con $AC_p(K)$. Inoltre porremo $AC_p(K) = \{0\}$ se $p < 0$.*

OSSERVAZIONE 5.7.
Per ogni $p \in \mathbb{Z}$ si ha $\partial_p(AC_p(K)) \subseteq AC_{p-1}(K)$.
Infatti, supponendo $p \geq 1$, per ogni p-simplesso affine $[v_0, \ldots, v_p]$ si ha $[v_0, \ldots, v_p] \circ F_{i,p} = [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p]$ e quindi $\partial_p([v_0, \ldots, v_p]) = \sum\limits_{i=0}^{p} (-1)^i [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p] \in AC_{p-1}(K)$.

DEFINIZIONE 5.8. *Siano $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, p \geq 0, n \geq 0$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme convesso e sia $[v_0, \ldots, v_p]$ il p-simplesso generato da $v_0, \ldots, v_p \in K$. Sia $v \in K$. Il* **cono su** $[v_0, \ldots, v_p]$ **di vertice** v *è il p-simplesso affine di K $v * [v_0, \ldots, v_p] = [v, v_0, \ldots, v_p]$. L'***omomorfismo definito da** v *è $v* : AC_p(K) \to AC_{p+1}(K)$ definito estendendo per linearità: $v*(\sum_{i=1}^{s} n_i \sigma_i) = \sum_{i=1}^{s} n_i v * \sigma_i$. Inoltre porremo $v* = 0$ se $p < 0$.*

LEMMA 5.9. *Siano $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme convesso, sia $c \in AC_p(K)$ e sia $v \in K$. Allora*

$$\partial_{p+1}(v * c) = c - v * \partial_p(c).$$

Dim. Ovviamente è sufficente mostrare il Lemma se $c = [v_0, \ldots, v_p]$ è il p-simplesso generato da $v_0, \ldots, v_p \in K$. Usando il calcolo nell'Osservazione 5.7 si ha

$$\partial_{p+1}(v * [v_0, \ldots, v_p]) = \partial_{p+1}([v, v_0, \ldots, v_p]) = [v_0, \ldots, v_p] + \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i [v, v_0, \ldots, \hat{v}_{i-1}, \ldots, v_p] =$$

$$= [v_0, \ldots, v_p] + \sum_{i=0}^{p} (-1)^{i+1} [v, v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p] = [v_0, \ldots, v_p] - \sum_{i=0}^{p} (-1)^i v * [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p] =$$

$$= [v_0, \ldots, v_p] - v * \sum_{i=0}^{p} (-1)^i [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p] = c - v * \partial_p(c). \quad \blacksquare$$

5.2. Suddivisioni baricentriche.

DEFINIZIONE 5.10. *Siano* $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, p \geq 0, n \geq 0$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *un sottoinsieme convesso e siano* $v_0, \ldots, v_p \in K$. *Il* **baricentro di** $[v_0, \ldots, v_p]$ *è il punto* $b_{[v_0,\ldots,v_p]} = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{p+1} v_i \in K$. *La* **suddivisione baricentrica di** $[v_0, \ldots, v_p]$ *è la decomposizione di* $[v_0, \ldots, v_p]$ *in* p*-simplessi definita induttivamente al modo seguente: se* $p = 0$ *è* $[v_0]$*; se* $p \geq 1$ *è la decomposizione di* $[v_0, \ldots, v_p]$ *in* p*-simplessi del tipo* $[b_{[v_0,\ldots,v_p]}, w_0, \ldots, w_{p-1}]$ *dove* $[w_0, \ldots, w_{p-1}]$ *è un* $(p-1)$*-simplesso della suddivisione baricentrica di una faccia* $[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p]$.

*L'***operatore di suddivisione** $s_p : AC_p(K) \to AC_p(K)$ *è definito induttivamente, per ogni* $\alpha = [v_0, \ldots, v_p]$*, da*

$$s_0(\alpha) = \alpha \text{ e, se } p \geq 1, s_p(\alpha) = b_\alpha * s_{p-1}(\partial_p(\alpha))$$

ed estendendo per linearità ad $AC_p(K)$. *Se* $m \in \mathbb{N}$ *poniamo* $s_p^m = s_p \circ s_p \circ \ldots \circ s_p$ *iterato* m *volte. Porremo inoltre* $s_p = 0$ *se* $p \in \mathbb{Z}, p < 0$.

OSSERVAZIONI 5.11.

Siano $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, p \geq 0, n \geq 0$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *un sottoinsieme convesso e siano* $v_0, \ldots, v_p \in K$.

(a) *I vertici dei simplessi nella suddivisione baricentrica di* $[v_0, \ldots, v_p]$ *sono esattamente i baricentri di tutte le facce* h*-dimensionali* $[v_{j_0}, \ldots, v_{j_h}]$ *di* $[v_0, \ldots, v_p]$ *per* $0 \leq h \leq p$.

(b) *Se* $K = \Delta_P$*, i* p*-simplessi che compaiono in* $s_p([E_0, \ldots, E_p])$ *sono esattamente quelli della suddivisione baricentrica di* $[E_0, \ldots, E_p]$.

Per il seguito sarà necessario comprendere quanto siano grandi i p-simplessi che appaiono nell'iterazione $s_p^m(\alpha)$.

DEFINIZIONE 5.12. *Sia* $Z \subseteq \mathbb{R}^n$. *Il* **diametro di** Z *è* $\operatorname{diam}(Z) = \sup_{x,y \in Z}\{||x - y||\}$ *dove se* $x \in \mathbb{R}^n$ *denotiamo con* $||x||$ *la norma Euclidea di* X. *Se* $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, p \geq 0, n \geq 0$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *è un sottoinsieme convesso,* $v_0, \ldots, v_p \in K$ *e* $\alpha = [v_0, \ldots, v_p]$ *porremo* $\operatorname{diam}(\alpha) = \operatorname{diam}(\operatorname{Im} \alpha)$.

LEMMA 5.13. *Siano* $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, p \geq 0, n \geq 0$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *un sottoinsieme convesso,* $v_0, \ldots, v_p \in K$ *e sia* $\alpha = [v_0, \ldots, v_p]$. *Per ogni* p*-simplesso* β *nella suddivisione baricentrica di* α *si ha*

$$\operatorname{diam}(\beta) \leq \frac{p}{p+1} \operatorname{diam}(\alpha).$$

In particolare se $K = \Delta_P$ *e* $i_p = [E_0, \ldots, E_p]$*, per ogni* $\delta > 0$ *esiste* $m \in \mathbb{N}$ *tale che* $s_p^m(i_p) = \sum_{j=1}^{q} r_j \alpha_j$*, per certi* $r_j \in \mathbb{Z}$ *e certi* p*-simplessi affini* α_j *tali che* $\operatorname{diam}(\alpha_j) < \delta$ *per ogni* $j \in \{1, \ldots, q\}$.

Dim. L'asserto è certo vero se $p = 0$ dunque supponiamo $p \geq 1$ e procediamo per induzione su p. Iniziamo con l'osservare che, per ogni $x \in \operatorname{Im} \alpha$ si ha

$$(*) \quad \max_{y \in \operatorname{Im} \alpha}\{||x - y||\} = \max_{0 \leq k \leq p}\{||x - v_k||\}.$$

Infatti, per definizione di $[v_0, \ldots, v_p]$, un punto $y \in \operatorname{Im} \alpha$ è $y = \sum_{i=0}^{p} t_i v_i$ con $0 \leq t_i \leq 1$ per ogni $i \in \{0, \ldots, p\}$ e $\sum_{i=0}^{p} t_i = 1$, pertanto

$$\begin{aligned} ||x - y|| &= ||x - \sum_{i=0}^{p} t_i v_i|| = ||\sum_{i=0}^{p} t_i (x - v_i)|| \leq \sum_{i=0}^{p} t_i ||x - v_i|| \leq \sum_{i=0}^{p} t_i \max_{0 \leq k \leq p}\{||x - v_k||\} = \\ &= \max_{0 \leq k \leq p}\{||x - v_k||\}. \end{aligned}$$

Da $(*)$ segue immediatamente che $\operatorname{diam}(\alpha) = \max_{0\le i<j\le p}\{||v_i - v_j||\}$.
Ora sia $\beta = [b_\alpha, w_0, \dots, w_{p-1}]$ un p-simplesso della suddivisione baricentrica di α. Allora sarà sufficente verificare che

$$(**) \quad ||u-v|| \le \frac{p}{p+1}\operatorname{diam}(\alpha) \text{ per ogni } u, v \in \{b_\alpha, w_0, \dots, w_{p-1}\}.$$

Per vedere ciò consideriamo due casi.
Caso 1: $u \ne b_\alpha \ne v$.
Allora $u = w_i$ e $v = w_j$ stanno in un $(p-1)$-simplesso τ' nella suddivisione baricentrica di una faccia τ di α e quindi, per induzione,

$$||u-v|| \le \operatorname{diam}(\tau') \le \frac{p-1}{p}\operatorname{diam}(\tau) \le \frac{p}{p+1}\operatorname{diam}(\alpha).$$

Caso 2: $v = b_\alpha$.
Allora $u = w_s$ e $||u-v|| = ||w_s - b_\alpha|| \le ||v_i - b_\alpha||$ per qualche $i \in \{0, \dots, p\}$ in virtù di $(*)$.
Sia ora b_i il baricentro di $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p]$, in modo che

$$b_i = \sum_{j=0, j\ne i}^{p} \frac{1}{p} v_j \text{ e } b_\alpha = \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{p+1} v_j = \frac{1}{p+1} v_i + \frac{p}{p+1} b_i$$

e si ha

$$||v_i - b_\alpha|| = ||v_i - \frac{1}{p+1} v_i - \frac{p}{p+1} b_i|| = ||\frac{p}{p+1}(v_i - b_i)|| \le \frac{p}{p+1}\operatorname{diam}(\alpha).$$

Questo dimostra $(**)$ e la prima asserzione del lemma. Per la seconda asserzione sarà sufficente mostrare che, se $m \in \mathbb{N}$, allora

$$(***) \quad s_p^m(i_p) = \sum_{j=1}^{q} r_j \alpha_j, r_j \in \mathbb{Z}, \alpha_j \ p\text{-simplessi affini tali che } \operatorname{diam}(\alpha_j) \le (\frac{p}{p+1})^m \operatorname{diam}(\Delta_p)$$

dato che $\lim_{m\to\infty}(\frac{p}{p+1})^m \operatorname{diam}(\Delta_p) = 0$. Infine mostriamo $(***)$ per induzione su m. Se $m = 1$ sappiamo già dall'Osservazione 5.11(b) che $s_p(i_p) = \sum_{j=1}^q r_j\alpha_j$ dove gli α_j sono i p-simplessi della suddivisione baricentrica di i_p e quindi $\operatorname{diam}(\alpha_j) \le \frac{p}{p+1}\operatorname{diam}(\Delta_p)$ per la prima parte del Lemma. Se $m \ge 2$ sia $s_p^{m-1}(i_p) = \sum_{k=1}^s a_k\beta_k$ con $a_k \in \mathbb{Z}$ e β_k sono p-simplessi affini tali che, per induzione, $\operatorname{diam}(\beta_k) \le (\frac{p}{p+1})^{m-1}\operatorname{diam}(\Delta_p)$ per ogni $k \in \{1, \dots, s\}$. Ne segue che $s_p^m(i_p) = \sum_{k=1}^s a_k s_p(\beta_k)$ e, come nell'Osservazione 5.11(b), $s_p(\beta_k)$ è somma di p-simplessi affini γ_{kl} della suddivisione baricentrica di β_k. Quindi $s_p^m(i_p) = \sum_{k,l} r_{kl}\gamma_{kl}$ per certi $r_{kl} \in \mathbb{Z}$ e, per la prima parte del Lemma, $\operatorname{diam}(\gamma_{kl}) \le \frac{p}{p+1}\operatorname{diam}(\beta_k) \le (\frac{p}{p+1})^m \operatorname{diam}(\Delta_p)$. Questo dimostra $(***)$ e conclude la dimostrazione del Lemma. ∎

Definizione 5.14. *Siano $p \in \mathbb{Z}, p \ge 0$ e sia X uno spazio topologico. L'***operatore di suddivisione** *$S_p : C_p(X) \to C_p(X)$ è definito, estendendo per linearità, da*

$$S_p(\sigma) = \sigma_{\#,p} \circ s_p(i_p)$$

dove $i_p = [E_0, \dots, E_p] = \operatorname{Id}_{\Delta_p}$ e $s_p : AC_p(\Delta_p) \to AC_p(\Delta_p)$. Se $m \in \mathbb{N}$ poniamo $S_p^m = S_p \circ S_p \circ \ldots \circ S_p$ iterato m volte. Porremo inoltre $S_p = 0$ se $p \in \mathbb{Z}, p < 0$.

In realtà, in caso di p-catene affini su Δ_p, i due operatori S_p ed s_p coincidono.

Lemma 5.15. *Siano* $p \in \mathbb{Z}, p \geq 0$ *e* $c \in AC_p(\Delta_p)$. *Allora* $S_p(c) = s_p(c)$.

Dim. Ovviamente è sufficente mostrare il Lemma se $c = [v_0, \ldots, v_p]$ è il p-simplesso generato da $v_0, \ldots, v_p \in \Delta_p$. Per iniziare stabiliamo la seguente notazione: se $p \geq 1$, per ogni k tale che $1 \leq k \leq p$ e per ogni sottoinsieme non vuoto $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{0, \ldots, p\}$ con $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq p$, poniamo $[v_0, \ldots, v_p]_I = [v_0, \ldots, \hat{v}_{i_1}, \ldots, \hat{v}_{i_k}, \ldots, v_p]$. Poniamo poi $[v_0, \ldots, v_p]_I = [v_0, \ldots, v_p]$ se $I = \emptyset$. Se $\alpha = [v_0, \ldots, v_p]$ asseriamo che

$$(*) \quad s_{p-k}([v_0, \ldots, v_p]_I) = \alpha_{\#,p-k} \circ s_{p-k}([E_0, \ldots, E_p]_I).$$

Mostreremo $(*)$ per induzione su $p-k \geq 0$. Nel caso $p = k$ si ha $s_0([v_0, \ldots, v_p]_I) = [v_0, \ldots, v_p]_I$ e $\alpha_{\#,0}([E_0, \ldots, E_p]_I) = [\alpha(E_0), \ldots, \alpha(E_p)]_I) = [v_0, \ldots, v_p]_I$ dato che $\alpha(E_i) = v_i$ per definizione di $[v_0, \ldots, v_p]$. Ora supponiamo $p - k \geq 1$ e, usando quanto visto nell'Osservazione 5.7, calcoliamo

$$\begin{aligned} s_{p-k}([v_0, \ldots, v_p]_I) &= b_{[v_0,\ldots,v_p]_I} * s_{p-k-1}(\partial_{p-k}([v_0, \ldots, v_p]_I)) = \\ &= b_{[v_0,\ldots,v_p]_I} * s_{p-k-1}(\sum_{0 \leq j \leq p, j \notin I} (-1)^{\epsilon_j}[v_0, \ldots, v_p]_{I \cup \{j\}}) = \\ &= b_{[v_0,\ldots,v_p]_I} * \sum_{0 \leq j \leq p, j \notin I} (-1)^{\epsilon_j} s_{p-k-1}([v_0, \ldots, v_p]_{I \cup \{j\}}) \end{aligned}$$

dove gli ϵ_j sono gli (opportuni) esponenti che compaiono nel calcolo di $\partial_{p-k}([v_0, \ldots, v_p]_I)$. Per induzione, $s_{p-k-1}([v_0, \ldots, v_p]_{I \cup \{j\}}) = \alpha_{\#,p-k-1} \circ s_{p-k-1}([E_0, \ldots, E_p]_{I \cup \{j\}})$ e quindi

$$\begin{aligned} s_{p-k}([v_0, \ldots, v_p]_I) &= b_{[v_0,\ldots,v_p]_I} * \sum_{0 \leq j \leq p, j \notin I} (-1)^{\epsilon_j} \alpha_{\#,p-k-1} \circ s_{p-k-1}([E_0, \ldots, E_p]_{I \cup \{j\}}) = \\ &= b_{[v_0,\ldots,v_p]_I} * \alpha_{\#,p-k-1} \circ s_{p-k-1}(\sum_{0 \leq j \leq p, j \notin I} (-1)^{\epsilon_j}[E_0, \ldots, E_p]_{I \cup \{j\}})) = \\ &= b_{[v_0,\ldots,v_p]_I} * \alpha_{\#,p-k-1} \circ s_{p-k-1}(\partial_{p-k}([E_0, \ldots, E_p]_I)). \end{aligned}$$

Mentre

$$\alpha_{\#,p-k} \circ s_{p-k}([E_0, \ldots, E_p]_I) = \alpha_{\#,p-k} \circ b_{[E_0,\ldots,E_p]_I} * s_{p-k-1}(\partial_{p-k}([E_0, \ldots, E_p]_I))$$

e, per mostrare $(*)$, basta dimostrare che, per ogni $I \subseteq \{0, \ldots, p\}$ di cardinalità k con $0 \leq k \leq p$, vale la

$$(**) \quad \alpha_{\#,p-k} \circ b_{[E_0,\ldots,E_p]_I} = b_{[v_0,\ldots,v_p]_I} * \alpha_{\#,p-k-1}.$$

Presi $w_0, \ldots, w_{p-k-1} \in \Delta_p$ si ha

$$\begin{aligned} \alpha_{\#,p-k} \circ b_{[E_0,\ldots,E_p]_I} * [w_0, \ldots, w_{p-k-1}] &= \alpha_{\#,p-k}([b_{[E_0,\ldots,E_p]_I}, w_0, \ldots, w_{p-k-1}]) = \\ = [\alpha(b_{[E_0,\ldots,E_p]_I}), \alpha(w_0), \ldots, \alpha(w_{p-k-1})] &= \alpha(b_{[E_0,\ldots,E_p]_I}) * [\alpha(w_0), \ldots, \alpha(w_{p-k-1})] = \\ = \alpha(b_{[E_0,\ldots,E_p]_I}) * \alpha_{\#,p-k-1}([w_0, \ldots, w_{p-k-1}]) &= b_{[v_0,\ldots,v_p]_I} * \alpha_{\#,p-k-1}([w_0, \ldots, w_{p-k-1}]) \end{aligned}$$

dato che, ovviamente, $\alpha(b_{[E_0,\ldots,E_p]_I}) = b_{[v_0,\ldots,v_p]_I}$. Questo dimostra $(**)$ e quindi anche $(*)$. Ora, sempre per $\alpha = [v_0, \ldots, v_p]$, asseriamo che

$$(***) \quad s_{p-1}(\partial_p(\alpha)) = \alpha_{\#,p-1} \circ s_{p-1}(\partial_p(i_p)).$$

Infatti, usando $(*)$ ed il calcolo nell'Osservazione 5.7, si ha

$$s_{p-1}(\partial_p(\alpha)) = s_{p-1}(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p]) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i s_{p-1}([v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p]) =$$

$$= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i s_{p-1}([v_0,\dots,v_p]_{\{i\}}) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \alpha_{\#,p-1}\circ s_{p-1}([E_0,\dots,E_p]_{\{i\}}) =$$

$$= \alpha_{\#,p-1}\circ s_{p-1}(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i [E_0,\dots,E_p]_{\{i\}}) = \alpha_{\#,p-1}\circ s_{p-1}(\partial_p(i_p))$$

e questo dimostra $(***)$. Infine dimostriamo che $S_p(\alpha) = s_p(\alpha)$ per induzione su p. Se $p = 0$ si ha, per definizione, $s_0(\alpha) = \alpha$ e $S_0(\alpha) = \alpha_{\#,0}\circ s_0(i_0) = \alpha_{\#,0}(i_0) = \alpha\circ i_0 = \alpha$. Invece se $p \geq 1$, usando $(**)$ e $(***)$, si ha

$$S_p(\alpha) = \alpha_{\#,p}\circ s_p(i_p) = \alpha_{\#,p}\circ b_{i_p} * s_{p-1}(\partial_p(i_p)) = b_\alpha * \alpha_{\#,p-1}\circ s_{p-1}(\partial_p(i_p)) = b_\alpha * s_{p-1}(\partial_p(\alpha)) = s_p(\alpha).$$

■

Ora passiamo alle proprietà dell'operatore suddivisione. La più importante sarà che iterandolo abbastanza volte si può ottenere una catena $\mathcal{U}$-piccola. Utilizzeremo anche la seguente

OSSERVAZIONE 5.16.
Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X. Allora $S_p(C_p^{\mathcal{U}}(X)) \subseteq C_p^{\mathcal{U}}(X)$ per ogni $p \in \mathbb{Z}$.

Infatti se $p \geq 0$ e $c = \sum_{i=1}^{s} n_i\sigma_i \in C_p^{\mathcal{U}}(X)$ si ha $S_p(c) = \sum_{i=1}^{s} n_i S_p(\sigma_i) = \sum_{i=1}^{s} n_i(\sigma_i)_{\#,p}\circ s_p(i_p)$ ed ovviamente $(\sigma_i)_{\#,p}\circ s_p(i_p)$ è $\mathcal{U}$-piccola, dato che σ_i lo è.

LEMMA 5.17. *Sia $p \in \mathbb{Z}$ e siano X, Y spazi topologici.*
- (i) *Se $f : X \to Y$ è un'applicazione continua, allora $S_p \circ f_{\#,p} = f_{\#,p}\circ S_p$.*
- (ii) $\partial_p \circ S_p = S_{p-1}\circ\partial_p$.
- (iii) *Per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X e per ogni $c \in C_p(X)$, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $S_p^m(c) \in C_p^{\mathcal{U}}(X)$.*

Dim. Per dimostrare le identità in (i) e (ii) è sufficente verificarle sui p-simplessi σ per $p \geq 0$. Abbiamo

$$S_p\circ f_{\#,p}(\sigma) = S_p(f\circ\sigma) = (f\circ\sigma)_{\#,p}(s_p(i_p)) = f_{\#,p}\circ\sigma_{\#,p}(s_p(i_p)) = f_{\#,p}\circ S_p(\sigma)$$

e questo mostra la (i). Facciamo ora vedere la (ii) per induzione su p. Essendo la (ii) ovvia per $p = 0$ supponiamo $p \geq 1$. Si ha, usando i Lemmi 1.12 e 5.9,

$$\partial_p\circ S_p(\sigma) = \partial_p\circ\sigma_{\#,p}(s_p(i_p)) = \sigma_{\#,p-1}\circ\partial_p(b_{i_p} * s_{p-1}(\partial_p(i_p)) = \sigma_{\#,p-1}(s_{p-1}(\partial_p(i_p)) - b_{i_p} * \partial_{p-1}(s_{p-1}(\partial_p(i_p)))).$$

Ora usando il Lemma 5.15 e l'induzione si ha

$$\partial_{p-1}(s_{p-1}(\partial_p(i_p))) = \partial_{p-1}\circ S_{p-1}(\partial_p(i_p))) = S_{p-2}\circ\partial_{p-1}(\partial_p(i_p)) = 0$$

e quindi, usando il Lemma 5.15, la (i) ed il Lemma 1.12, si deduce che

$$\begin{aligned} \partial_p\circ S_p(\sigma) &= \sigma_{\#,p-1}\circ s_{p-1}(\partial_p(i_p)) = \sigma_{\#,p-1}\circ S_{p-1}(\partial_p(i_p)) = S_{p-1}\circ\sigma_{\#,p-1}(\partial_p(i_p)) = \\ &= S_{p-1}\circ\partial_p\circ\sigma_{\#,p}(i_p) = S_{p-1}\circ\partial_p(\sigma\circ i_p) = S_{p-1}\circ\partial_p(\sigma) \end{aligned}$$

e la (ii) è dimostrata. Per mostrare la (iii) iniziamo con l'osservare che, anche in questo caso, è sufficente assumere che $c = \sigma$ è un p-simplesso. Infatti supponiamo che la (iii) sia dimostrata per i p-simplessi e sia $c = \sum_{i=1}^{s} n_i\sigma_i \in C_p(X)$. Allora, per ogni $i \in \{1,\dots,s\}$, esiste $m_i \in \mathbb{N}$

tale che $S_p^{m_i}(\sigma_i) \in C_p^{\mathcal{U}}(X)$. Posto $m = \max\{m_i, 1 \leq i \leq s\}$ si ha, usando l'Osservazione 5.16, che $S_p^m(\sigma_i) \in C_p^{\mathcal{U}}(X)$ per ogni $i \in \{1, \ldots, s\}$, e quindi $S_p^m(c) = \sum\limits_{i=1}^{s} n_i S_p^m(\sigma_i) \in C_p^{\mathcal{U}}(X)$.
Ora dimostriamo la (iii) per un p-simplesso $\sigma : \Delta_p \to X$. Sia $\{\sigma^{-1}(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ il ricoprimento aperto di Δ_p associato a σ. Ora Δ_p è uno spazio metrico compatto quindi esiste un numero di Lebesgue δ per $\{\sigma^{-1}(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ (vedasi per esempio il Teorema [**S**, Prop.10.8]), e quindi per ogni sottoinsieme $Z \subseteq \Delta_p$ tale che $\operatorname{diam}(Z) < \delta$ esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che $Z \subseteq \sigma^{-1}(U)$, da cui $\sigma(Z) \subseteq U$. Sappiamo già dal Lemma 5.13 che esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $s_p^m(i_p)$ è una p-catena affine $\sum_{j=1}^{q} r_j \alpha_j$ i cui p-simplessi affini α_j sono tali che $\operatorname{diam}(\alpha_j) < \delta$ e pertanto $\operatorname{Im} \sigma \circ \alpha_j = \sigma(\operatorname{Im} \alpha_j) \subseteq U$ per qualche $U \in \mathcal{U}$ (dipendente da j). Del resto è facile vedere che $S_p^m(\sigma) = \sigma_{\#,p} \circ s_p^m(i_p)$: infatti ciò vale certamente per $m = 1$ per definizione di S_p e, se $m \geq 2$, si ha, per induzione ed usando la (i) ed il Lemma 5.15, $S_p^m(\sigma) = S_p \circ S_p^{m-1}(\sigma) = S_p \circ \sigma_{\#,p} \circ s_p^{m-1}(i_p) = \sigma_{\#,p} \circ S_p \circ s_p^{m-1}(i_p) = \sigma_{\#,p} \circ s_p^m(i_p)$.
Allora $S_p^m(\sigma) = \sigma_{\#,p} \circ s_p^m(i_p) = \sigma_{\#,p}(\sum\limits_{j=1}^{q} r_j \alpha_j) = \sum\limits_{j=1}^{q} r_j \sigma \circ \alpha_j \in C_p^{\mathcal{U}}(X)$. ■

Ora possiamo concludere la dimostrazione del Teorema di Maier-Vietoris.
Dimostrazione della Proposizione 5.5. Iniziamo col costruire un omomorfismo $h_p : C_p(X) \to C_{p+1}(X)$ tale che

$$(*) \quad \partial_{p+1} \circ h_p + h_{p-1} \circ \partial_p = \operatorname{Id}_{C_p(X)} - S_p.$$

Definiamo $h_p = 0$ se $p \leq 0$ e, se $p \geq 1$, definiamo induttivamente, per ogni p-simplesso $\sigma : \Delta_p \to X$,

$$h_p(\sigma) = \sigma_{\#,p+1}(b_p * (i_p - S_p(i_p) - h_{p-1}(\partial_p(i_p))))$$

ed estendiamo per linearità a $C_p(X)$. È facile verificare che $h_p \circ f_{\#,p} = f_{\#,p} \circ h_p$ per ogni applicazione continua $f : X \to Y$ e che $h_p(C_p^{\mathcal{U}}(X)) \subseteq C_{p+1}^{\mathcal{U}}(X)$. Ora verifichiamo $(*)$. L'asserto essendo ovvio per $p \leq 0$ supponiamo $p \geq 1$ e procediamo per induzione su p. Al solito è sufficente verificare $(*)$ su ogni p-simplesso σ. Si ha, usando i Lemmi 1.12 e 5.9,

$$\begin{aligned} \partial_{p+1} \circ h_p(\sigma) &= \partial_{p+1} \circ \sigma_{\#,p+1}(b_p * (i_p - S_p(i_p) - h_{p-1}(\partial_p(i_p)))) = \\ &= \sigma_{\#,p} \circ \partial_{p+1}(b_p * (i_p - S_p(i_p) - h_{p-1}(\partial_p(i_p)))) = \end{aligned}$$

$$= \sigma_{\#,p}(i_p - S_p(i_p) - h_{p-1}(\partial_p(i_p))) - \sigma_{\#,p} \circ b_p * (\partial_p(i_p) - \partial_p \circ S_p(i_p) - \partial_p \circ h_{p-1}(\partial_p(i_p)))$$

Usando l'induzione il termine su cui è calcolato b_p* è

$$\partial_p(i_p) - \partial_p \circ S_p(i_p) - \partial_p \circ h_{p-1}(\partial_p(i_p)) = \partial_p(i_p) - \partial_p \circ S_p(i_p) - \partial_p(-\partial_{p+1} \circ h_p(i_p) + i_p - S_p(i_p)) =$$
$$= \partial_p(i_p) - \partial_p \circ S_p(i_p) - \partial_p(i_p) + \partial_p \circ S_p(i_p) = 0$$

e pertanto usando i Lemmi 5.17(i) e 1.12, la commutatività di h_p e $\sigma_{\#,p}$ ed il fatto che $\sigma_{\#,p}(i_p) = \sigma$,

$$\partial_{p+1} \circ h_p(\sigma) = \sigma_{\#,p}(i_p) - S_p \circ \sigma_{\#,p}(i_p) - h_{p-1} \circ \partial_p \circ \sigma_{\#,p}(i_p) = \sigma - S_p(\sigma) - h_{p-1} \circ \partial_p(\sigma)$$

e $(*)$ è dimostrata.
Sia ora $c \in Z_p(X)$ in modo che, applicando $(*)$, si ha $c - S_p(c) = \partial_{p+1}(h_p(c)) \in B_p(X)$, da cui $c + B_p(X) = S_p(c) + B_p(X)$. Inoltre osserviamo che anche $S_p(c) \in Z_p(X)$ dato che, per il Lemma 5.17(ii), si ha $\partial_p(S_p(c)) = S_{p-1}(\partial_p(c)) = 0$. Quindi per ogni $m \geq 1$ si ha

$$c + B_p(X) = S_p^m(c) + B_p(X).$$

Poniamo ora $Z_p^{\mathcal{U}}(X) = \mathrm{Ker}(\partial_p)_{|C_p^{\mathcal{U}}(X)}$ e $B_p^{\mathcal{U}}(X) = \mathrm{Im}(\partial_{p+1})_{|C_{p+1}^{\mathcal{U}}(X)}$ in modo che $H_p^{\mathcal{U}}(X) = Z_p^{\mathcal{U}}(X)/B_p^{\mathcal{U}}(X)$. Se $c \in Z_p^{\mathcal{U}}(X)$ si ha che $h_p(c) \in C_{p+1}^{\mathcal{U}}(X)$, perciò $c - S_p(c) = \partial_{p+1}(h_p(c)) \in B_p^{\mathcal{U}}(X)$ e quindi $c + B_p^{\mathcal{U}}(X) = S_p(c) + B_p^{\mathcal{U}}(X)$. Inoltre, come sopra, si ha che $S_p(c) \in Z_p^{\mathcal{U}}(X)$ da cui, per ogni $m \geq 1$,

$$c + B_p^{\mathcal{U}}(X) = S_p^m(c) + B_p^{\mathcal{U}}(X).$$

Infine consideriamo l'inclusione $i : C_p^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_p(X)$ che induce un omomorfismo $i_{*,p} : H_p^{\mathcal{U}}(X) \to H_p(X)$ per ogni $p \in \mathbb{Z}$. Tale applicazione è certamente suriettiva dato che, per il Lemma 5.17(iii), per ogni $c \in Z_p(X)$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $S_p^m(c) \in C_p^{\mathcal{U}}(X)$ e quindi $S_p^m(c) \in Z_p^{\mathcal{U}}(X)$ ed ora $c + B_p(X) = S_p^m(c) + B_p(X) = i_{*,p}(S_p^m(c) + B_p^{\mathcal{U}}(X))$. Invece sia $c \in Z_p^{\mathcal{U}}(X)$ tale che $i_{*,p}(c + B_p^{\mathcal{U}}(X)) = 0$ in modo che $c \in B_p(X)$ e quindi esiste $b \in C_{p+1}(X)$ tale che $\partial_{p+1}(b) = c$. Sempre per il Lemma 5.17(iii) esiste $m' \in \mathbb{N}$ tale che $S_{p+1}^{m'}(b) \in C_{p+1}^{\mathcal{U}}(X)$ e quindi, usando il Lemma 5.17(ii), si ha $\partial_{p+1} \circ S_{p+1}^{m'}(b) = S_p^{m'} \circ \partial_{p+1}(b) = S_p^{m'}(c)$, da cui deduciamo che $S_p^{m'}(c) \in B_p^{\mathcal{U}}(X)$. Ed ora $c + B_p^{\mathcal{U}}(X) = S_p^{m'}(c) + B_p^{\mathcal{U}}(X) = 0$ e $i_{*,p}$ è iniettiva.
■

6. Applicazioni

Daremo ora alcune applicazioni classiche della teoria dell'omologia.

6.1. Omologia dei grafi.

Definizione 6.1. *Un* **grafo** *è uno spazio topologico che è unione di un numero finito di archi chiusi tali che ogni due archi si incontrano al più nei punti iniziali e/o finali. Un* **albero** *è un grafo connesso senza cicli.*

Useremo il seguente fatto (vedasi per esempio [**J**, Teorema 9.3.4]): ogni grafo connesso G ha un albero contenuto in G che ne contiene tutti i vertici.

Corollario 6.2. *Sia G un grafo connesso non contraibile. Allora esiste $r \in \mathbb{N}$ tale che*

$$H_p(G) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & se\ p = 0 \\ \mathbb{Z}^r & se\ p = 1 \\ \{0\} & se\ p \geq 2 \end{cases}.$$

Dim. Contraendo un albero che contiene tutti i vertici di G otteniamo che G è omotopicamente equivalente ad un bouquet G_r di r cerchi per qualche $r \in \mathbb{N}$ (dato che G non è contraibile). Dunque $H_p(G) \cong H_p(G_r)$ per ogni p per l'invarianza omotopica dell'omologia (Corollario 2.2). Allora resta da mostrare, per induzione su r, che

$$H_p(G_r) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } p = 0 \\ \mathbb{Z}^r & \text{se } p = 1 \\ \{0\} & \text{se } p \geq 2 \end{cases}.$$

Se $r = 1$ allora $G_1 \cong S^1$ e l'asserto segue dal Corollario 5.3. Se $r \geq 2$ sia U un aperto di G_r che contiene un unico S^1 in G_r e sia V un aperto di G_r che contiene esattamente i restanti $r - 1$ S^1 in modo che $G_r = U \cup V$. Allora $U \simeq S^1$, $V \simeq G_{r-1}$ e $U \cap V \simeq \{x\}$ ed applichiamo la successione di Maier-Vietoris. Se $p \geq 2$ si ha $H_{p-1}(U \cap V) = \{0\}$ per il Corollario 2.3,

$H_p(U) \oplus H_p(V) = H_p(S^1) \oplus H_p(G_{r-1}) = \{0\}$ per i Corollari 2.2 e 5.3 e l'induzione ed abbiamo una successione esatta

$$\{0\} = H_p(U) \oplus H_p(V) \to H_p(G_r) \to H_{p-1}(U \cap V) = \{0\}$$

da cui $H_p(G_r) = \{0\}$. Se $p = 1$ abbiamo una successione esatta

$$H_1(U \cap V) \to H_1(U) \oplus H_1(V) \to H_1(G_r) \to H_0(U \cap V) \to H_0(U) \oplus H_0(V) \to H_0(G_r) \to 0$$

cioè

$$0 \to H_1(S^1) \oplus H_1(G_{r-1}) \to H_1(G_r) \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \to 0$$

Ora $\operatorname{Im}\phi \neq \{0\}$ altrimenti $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\phi = \{0\}$ ed abbiamo un'inclusione $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$, contraddizione. Pertanto $\phi(1) = (n_1, n_2)$ per qualche $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ e dunque ϕ è la moltiplicazione per (n_1, n_2). Quindi $(n_1, n_2) \neq (0, 0)$ e ϕ è iniettiva. Allora $\operatorname{Im}\chi = \operatorname{Ker}\phi = \{0\}$ e, dato che $H_1(S^1) \oplus H_1(G_{r-1}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{r-1} \cong \mathbb{Z}^r$ per il Corollario 5.3 e l'induzione, ne deduciamo una successione esatta

$$0 \to \mathbb{Z}^r \to H_1(G_r) \xrightarrow{\chi} 0$$

da cui $H_1(G_r) \cong \mathbb{Z}^r$. ■

6.2. Omologia delle superficie.

Calcoleremo ora l'omologia del g-toro. In maniera analoga si può calcolare l'omologia di altre superficie compatte e connesse.

Corollario 6.3. *Sia $g \geq 1$. Allora*

$$H_p(gT) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } p = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{se } p = 1 \\ \{0\} & \text{se } p \geq 2 \end{cases} .$$

Dim. Sappiamo già che $H_0(gT) \cong \mathbb{Z}$ per la Proposizione 1.17, dunque supponiamo $p \geq 1$. Consideriamo il poligono $P \subseteq \mathbb{R}^2$ con $4g$ lati dal quale si ottiene gT con l'dentificazione $a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{2g-1} a_{2g} a_{2g-1}^{-1} a_{2g}^{-1}$ e sia $q : P \to gT$ la mappa quoziente. Siano ora $x \in P - \partial P$, $\widetilde{U} = P - \{x\}$, $\widetilde{V} = P - \partial P$, $U = q(\widetilde{U})$ e $V = q(\widetilde{V})$ in modo che $\widetilde{U}$ e $\widetilde{V}$ sono aperti di P, U e V sono aperti di gT, $P = \widetilde{U} \cup \widetilde{V}$ e $gT = U \cup V$. Osserviamo inoltre che $V \cong \widetilde{V}$ sono omeomorfi ad un disco aperto in $\mathbb{R}^2$, mentre $U \cap V$ è omeomorfo ad una corona circolare in $\mathbb{R}^2$, dunque è omotopicamente equivalente ad S^1. D'altro canto $\widetilde{U}$ è omotopicamente equivalente a ∂P e quindi U è omotopicamente equivalente a $q(\partial P)$ che è un bouquet di $2g$ cerchi. Si ha allora $H_p(U) = \{0\}$ se $p \geq 2$ e $H_1(U) = \mathbb{Z}^{2g}$ come visto nella dimostrazione del Corollario 6.2, $H_p(V) = \{0\}$ se $p \geq 1$ per il Corollario 2.3, $H_{p-1}(U \cap V) = \{0\}$ se $p \geq 3$ e $H_1(U \cap V) = \mathbb{Z}$ per i Corollari 1.15, 2.2 e 5.3. La successione di Maier-Vietoris allora da, per $p \geq 3$,

$$\{0\} = H_p(U) \oplus H_p(V) \to H_p(gT) \to H_{p-1}(U \cap V) = \{0\}$$

e quindi $H_p(gT) = \{0\}$. Se $p \leq 2$ la successione di Maier-Vietoris è

$$\{0\} = H_2(U) \oplus H_2(V) \to H_2(gT) \to H_1(U \cap V) \to H_1(U) \oplus H_1(V) \to H_1(gT) \to H_0(U \cap V) \to$$

$$\to H_0(U) \oplus H_0(V) \to H_0(gT) \to 0 \text{ cioè}$$

$$0 \to H_2(gT) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{Z}^{2g} \to H_1(gT) \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Come nella dimostrazione del Corollario 6.2 si ha $\operatorname{Im}\chi = \{0\}$ da cui la successione esatta
$$0 \to H_2(gT) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{Z}^{2g} \to H_1(gT) \xrightarrow{\chi} 0.$$
Per concludere basta allora dimostrare che $k = 0$. Per vedere questo consideriamo le applicazioni $U \cap V \cong \widetilde{U} \cap \widetilde{V} \hookrightarrow \widetilde{U} \xrightarrow{q} U$ che inducono un isomorfismo $H_1(U \cap V) \cong H_1(\widetilde{U} \cap \widetilde{V}) \cong H_1(\widetilde{U}) \cong \mathbb{Z}$ con $H_1(\widetilde{U})$ generato da ∂P. Pertanto $H_1(U \cap V)$ è generato da $q(\partial P)$ e resta da mostrare che $q(\partial P) \simeq 0$ in U. Ma $\partial P = a_1 + a_2 + a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_{2g-1} + a_{2g} + a_{2g-1}^{-1} + a_{2g}^{-1}$ da cui $q(\partial P) = q(a_1) + q(a_2) + q(a_1^{-1}) + q(a_2^{-1}) + \ldots + q(a_{2g-1}) + q(a_{2g}) + q(a_{2g-1}^{-1}) + q(a_{2g}^{-1}) \in B_1(U)$ (ed è dunque zero in omologia) dato che, come visto nel primo passo della dimostrazione del Teorema 3.3, $q(a_i) + q(a_i^{-1}) \in B_1(U)$ per ogni $i \in \{1, \ldots, 2g\}$. ∎

6.3. Teorema del punto fisso.

Teorema 6.4. *Sia $n \geq 2$. Allora S^{n-1} non è retratto omotopico di D^n, cioè se $i : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ è l'inclusione, non esiste un'applicazione continua $\rho : D^n \to S^{n-1}$ tale che $\rho \circ i \simeq \mathrm{Id}_{S^{n-1}}$.*

Dim. Supponiamo che una tale ρ esista in modo che, per il Teorema 2.1, la Proposizione 1.14(i) ed il Corollario 5.3 si ha $(\rho \circ i)_{*,n-1} = \mathrm{Id}_{H_{n-1}(S^{n-1})} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$. Ma la Proposizione 1.14(ii) da la contraddizione $(\rho \circ i)_{*,n-1} = \rho_{*,n-1} \circ i_{*,n-1} = 0$ dato che $i_{*,n-1} = 0$, essendo $H_{n-1}(D^n) = \{0\}$ per il Corollario 2.3. ∎

Teorema 6.5 (Teorema del punto fisso di Brouwer). *Se $n \geq 2$ ogni applicazione continua $f : D^n \to D^n$ ha un punto fisso.*

Dim. La dimostrazione è perfettamente analoga al caso $n = 2$ ([**S**, Cor.16.8]). Se f non ha punti fissi, denotando, per ogni $x \in D^n$, con $\rho(x)$ il punto, dalla parte di x, di intersezione tra la retta che congiunge x ed $f(x)$ con S^{n-1}, si ottiene una retrazione di D^n in S^{n-1}, contraddicendo il Teorema 6.4. ∎

6.4. Invarianza della dimensione.

Prima premettiamo

Lemma 6.6. *Siano $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un intorno di x. Allora $H_{n-1}(U - \{x\}) \neq \{0\}$.*

Dim. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ tale che $x \in A \subseteq U$ e sia $\overline{D_\varepsilon(x)}$ un disco chiuso di raggio ε e centro x tale che $\overline{D_\varepsilon(x)} \subseteq A$. Sia $S_\varepsilon(x) = \partial \overline{D_\varepsilon(x)}$ così che $S_\varepsilon(x) \cong S^{n-1}$ e quindi $H_{n-1}(S_\varepsilon(x)) \cong \mathbb{Z}$ per i Corollari 1.15 e 5.3. Consideriamo il diagramma commutativo di inclusioni

$$\begin{tikzcd} S_\varepsilon(x) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, hook, "k"'] & U - \{x\} \arrow[d, hook, "j"] \\ & \mathbb{R}^n - \{x\} \end{tikzcd}$$

e, di conseguenza, il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \cong H_{n-1}(S_\varepsilon(x)) \arrow[r, "i_{*,n-1}"] \arrow[dr, "k_{*,n-1}"'] & H_{n-1}(U - \{x\}) \arrow[d, "j_{*,n-1}"] \\ & H_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{x\}). \end{tikzcd}$$

Ora $k_{*,n-1}$ è un isomorfismo per il Corollario 2.2 dato che $\mathbb{R}^n - \{x\} \simeq S^{n-1} \cong S_\varepsilon(x)$. Ne segue che $i_{*,n-1}$ è iniettiva e quindi $H_{n-1}(U - \{x\}) \neq \{0\}$. ■

Definizione 6.7. *Sia $n \geq 0$. Una* **varietà topologica di dimensione** *n è uno spazio topologico X di Hausdorff a base numerabile tale che, per ogni $x \in X$, esiste un intorno $U \subseteq X$ di x tale che U è omeomorfo ad $\mathbb{R}^n$.*

Esercizi 6.8.
(a) Una varietà topologica di dimensione 0 è uno spazio topologico X discreto e numerabile.
(b) Un aperto non vuoto di una varietà topologica di dimensione n è anch'esso una varietà topologica di dimensione n.

Teorema 6.9 (Invarianza della dimensione). *Uno spazio topologico X non può essere simultaneamente una varietà topologica di dimensione n ed m se $n \neq m$.*

Dim. Ovviamente non è restrittivo supporre che $n > m$. Se $m = 0$ allora X è discreto (Esercizio 6.8(a)) ma ogni $x \in X$ ha un intorno omeomorfo ad $\mathbb{R}^n$, che deve dunque essere discreto, contraddizione. Supponiamo ora $m \geq 1$. Sia $x \in X$ e sia U un intorno di X omeomorfo ad $\mathbb{R}^n$. Sia A un aperto di X tale che $x \in A \subseteq U$. Ora X è una varietà topologica di dimensione m dunque (Esercizio 6.8(b)) anche A lo è, pertanto esiste un intorno $V \subseteq A$ di x tale che V è omeomorfo ad $\mathbb{R}^m$ e quindi $V - \{x\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^m - \{p\}$ per qualche $p \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^m - \{p\}$ è omotopicamente equivalente a S^{m-1}. Per i Corollari 1.15, 2.2 e 5.3 ne segue che $H_{n-1}(V - \{x\}) \cong H_{n-1}(\mathbb{R}^m - \{p\}) \cong H_{n-1}(S^{m-1}) = \{0\}$. Ma $V \subseteq U$ dunque V è omeomorfo ad un intorno di un punto di $\mathbb{R}^n$ e quindi $H_{n-1}(V - \{x\}) \neq \{0\}$ per il Lemma 6.6, contraddizione. ■

6.5. Mappe tra sfere.

Definizione 6.10. *Sia $n \geq 1$ e sia $f : S^n \to S^n$ un'applicazione continua. Il* **grado di** *f è l'intero* $\deg(f) = f_{*,n}(1)$ *dove $f_{*,n} : \mathbb{Z} \cong H_n(S^n) \to H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.*

La definizione è chiaramente ben posta dato che ci sono solo due isomorfismi possibili tra $H_n(S^n)$ e $\mathbb{Z}$, uno l'opposto dell'altro e quindi cambiando isomorfismo il grado di f non cambia in quanto l'isomorfismo è applicato due volte. Inoltre è chiaro che $f_{*,n} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ è la moltiplicazione per $\deg(f)$. Ecco alcune semplici proprietà del grado.

Proposizione 6.11. *Sia $n \geq 1$ e siano $f, g : S^n \to S^n$ due applicazioni continue.*
(i) *Se $f \simeq g$ allora* $\deg(f) = \deg(g)$.
(ii) $\deg(g \circ f) = \deg(g)\deg(f)$.
(iii) $\deg(\mathrm{Id}_{S^n}) = 1$.

Dim. (i) Se $f \simeq g$ sappiamo che $f_{*,n} = g_{*,n}$ per il Teorema 2.1, quindi $\deg(f) = \deg(g)$. (ii) Usando la Proposizione 1.14(ii) si ha $\deg(g \circ f) = (g \circ f)_{*,n}(1) = g_{*,n} \circ f_{*,n}(1) = g_{*,n}(\deg(f)) = \deg(g)\deg(f)$. (iii) Per la la Proposizione 1.14(i) si ha $\mathrm{Id}_{S^n *,n} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$ da cui $\deg(\mathrm{Id}_{S^n}) = 1$. ■

Definizione 6.12. *Sia $n \geq 1$. La* **mappa antipodale di** *S^n è $A : S^n \to S^n$ definita da $A(x) = -x$.*

Lemma 6.13. *Sia $n \geq 1$. Allora* $\deg(A) = (-1)^{n+1}$.

Dim. Consideriamo le mappe di riflessione $R_i : S^n \to S^n$ definite, per ogni $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, da $R_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_{n+1})$ e dimostriamo che $\deg(R_i) = -1$ per ogni i. Questo, usando la Proposizione 6.11(ii), implicherà il Lemma dato che $A = R_1 \circ \ldots \circ R_{n+1}$.
Per calcolare il grado di R_i facciamo prima vedere che esse hanno tutte lo stesso grado. Infatti se R_{ij} è lo scambio di x_i con x_j, $1 \leq i < j \leq n+1$, si ha ovviamente $R_i = R_{ij} \circ R_j \circ R_{ij}$. Per la Proposizione 6.11(ii) si ha $\deg(R_i) = \deg(R_{ij}) \deg(R_j) \deg(R_{ij}) = \deg(R_{ij})^2 \deg(R_j) = \deg(R_j)$ dato che R_{ij} è un omeomorfismo, quindi $(R_{ij})_{*,n}$ è un isomorfismo per il Corollario 1.15, quindi $\deg(R_{ij}) = \pm 1$ (in quanto un isomorfismo da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ è o l'identità o l'opposto).
Ora calcoliamo $\deg(R_i)$ per induzione su n. Supponiamo prima $n = 1$ e mostriamo che $\deg(R_2) = -1$. Abbiamo $R_2(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ ovvero, identificando S^1 con i numeri complessi di modulo 1, si ha $R_2(z) = \overline{z}$ e quindi $R_2(\exp^{2\pi i t}) = \exp^{-2\pi i t}$ e pertanto, a livello di gruppi fondamentali, $(R_2)_* : \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ si ha $(R_2)_*(1) = -1$. Ma sappiamo che $H_1(S^1) \cong \pi_1(S^1, 1)$ (Teorema 3.3), da cui $\deg(R_2) = (R_2)_{*,1}(1) = -1$. Ora supponiamo $n \geq 2$ e consideriamo l'isomorfismo $H_n(S^n) \cong H_{n-1}(S^{n-1})$ ed il diagramma, che mostreremo essere commutativo

$$\begin{tikzcd} H_n(S^n) \cong \mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}"] \arrow[d, "(R_1)_{*,n}"] & \mathbb{Z} \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[d, "(R_1)_{*,n-1}"] \\ H_n(S^n) \cong \mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}"] & \mathbb{Z} \cong H_{n-1}(S^{n-1}). \end{tikzcd}$$

La commutatività del diagramma implica $\deg(R_1) = (R_1)_{*,n}(1) = (R_1)_{*,n-1}(1) = -1$ (per induzione). Per mostrare che il diagramma commuta riprendiamo il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U, V\}$, con $U = S^n - \{N\}$ e $V = S^n - \{S\}$ considerato nella dimostrazione del Corollario 5.3. È facile vedere che $R_1(U) \subseteq U$ e $R_1(V) \subseteq V$ da cui deduciamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_*(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, "R_{1,\#}"] & C_*(U) \oplus C_*(V) \arrow[r] \arrow[d, "R_{1,\#} \oplus R_{1,\#}"] & C_*^{\mathcal{U}}(S^n) \arrow[r] \arrow[d, "R_{1,\#}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_*(U \cap V) \arrow[r] & C_*(U) \oplus C_*(V) \arrow[r] & C_*^{\mathcal{U}}(S^n) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

che induce il diagramma commutativo cercato

$$\begin{tikzcd} H_n(S^n) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(R_1)_{*,n}"] & H_{n-1}(U \cap V) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[d, "(R_1)_{*,n-1}"] \\ H_n(S^n) \arrow[r, "\cong"] & H_{n-1}(U \cap V) \arrow[r, "\cong"] & H_{n-1}(S^{n-1}). \end{tikzcd}$$

■

PROPOSIZIONE 6.14. *Sia $n \geq 1$. La mappa antipodale $A : S^n \to S^n$ è omotopicamente equivalente all'identità se e solo se n è dispari.*

Dim. Se $n = 2k-1$ è dispari un'omotopia tra Id_{S^n} ed A è data da $F : S^n \times I \to S^n$ definita da $F(x,t) =$

$$(cos(\pi t)x_1 + sen(\pi t)x_2, cos(\pi t)x_2 - sen(\pi t)x_1, \ldots, cos(\pi t)x_{2k-1} + sen(\pi t)x_{2k}, cos(\pi t)x_{2k} - sen(\pi t)x_{2k-1}).$$

Invece se n è pari sappiamo già che $\deg(A) = -1$ per il Lemma 6.13 mentre $\deg(\mathrm{Id}_{S^n}) = 1$ (Proposizione 6.11(iii)), quindi non sono omotopicamente equivalenti per la Proposizione 6.11(i). ∎

Una conseguenza interessante è che *"non si può pettinare una sfera di dimensione pari senza doversi fermare da qualche parte"*, o, più precisamente

Definizione 6.15. *Sia $n \geq 1$. Un* **campo continuo di vettori tangenti ad** S^n *è un'applicazione continua $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tale che $v(x) \cdot x = 0$ per ogni $x \in S^n$.*

Teorema 6.16. *Sia $n \geq 1$. Allora esiste un campo continuo di vettori tangenti ad S^n mai nulli se e solo se n è dispari.*

Dim. Se $n = 2k - 1$ è dispari basta definire

$$v(x) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{2k}, -x_{2k-1}).$$

Se n è pari ed esiste un campo v continuo di vettori tangenti ad S^n mai nulli sia $w(x) = \frac{v(x)}{||v(x)||} \in S^n$ e costruiamo un'omotopia tra Id_{S^n} ed A ponendo $F(x,t) = cos(\pi t)x + sen(\pi t)w(x)$. Ovviamente F è continua e $F(x,t) \in S^n$ per ogni $x \in S^n, t \in I$, dato che, usando $w(x) \cdot x = 0$, si ha

$$(cos(\pi t)x + sen(\pi t)w(x)) \cdot (cos(\pi t)x + sen(\pi t)w(x)) = cos(\pi t)^2 x \cdot x + sen(\pi t)^2 w(x) \cdot w(x) = 1.$$

Inoltre $F(x,0) = x$ e $F(x,1) = -x$. Allora Id_{S^n} ed A sono omotopicamente equivalenti, contraddicendo la Proposizione 6.14. ∎

CAPITOLO 4

Elementi di topologia differenziale

1. Varietà ed applicazioni differenziabili

1.1. Definizioni.

DEFINIZIONE 1.1. *Siano $k, l \geq 0$, $U \subseteq \mathbb{R}^k$ e $V \subseteq \mathbb{R}^l$ due aperti non vuoti. Un'applicazione $f : U \to V$ si dice* **differenziabile** *se possiede derivate parziali di ordine s per ogni $s \geq 1$. Siano $X \subseteq \mathbb{R}^k$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^l$ due sottoinsiemi non vuoti. Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice* **differenziabile** *se per ogni $x \in X$ esiste un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^k$ contenente x ed un'applicazione differenziabile $F : U \to \mathbb{R}^l$ tale che $f_{|U \cap X} = F_{|U \cap X}$. Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice un* **diffeomorfismo** *se f è un omeomorfismo, è differenziabile e $f^{-1} : Y \to X$ è differenziabile.*

ESERCIZI 1.2.
Siano $k, l, q \geq 0$, $X \subseteq \mathbb{R}^k, Y \subseteq \mathbb{R}^l, Z \subseteq \mathbb{R}^q$ sottoinsiemi non vuoti.
(a) Id_X è differenziabile.
(b) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono differenziabili anche $g \circ f : X \to Z$ lo è.

L'idea della topologia differenziale è di studiare proprietà topologiche (di sottoinsiemi $X \subseteq \mathbb{R}^k$) che sono invarianti per diffeomorfismo. Per fare ciò occorre però dare più struttura ad X.

DEFINIZIONE 1.3. *Siano $k, m \geq 0$. Un sottoinsieme $M \subseteq \mathbb{R}^k$ si dice* **una varietà differenziabile di dimensione** *m se per ogni $x \in M$ esiste un intorno $W \cap M$ di x che è diffeomorfo ad un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Un diffeomorfismo $g : U \to W \cap M$ si dice una* **parametrizzazione di M in x**, *mentre $g^{-1} : W \cap M \to U$ si dice un* **sistema di coordinate di M in x**.

ESEMPI 1.4.
(a) S^2 è una varietà differenziabile di dimensione 2. Per esempio l'aperto $W \cap S^2 = \{(x, y, z) \in S^2 : z > 0\}$ è parametrizzato dal diffeomorfismo $g : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \to W \cap S^2$ definito da $g(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$. Analogamente si possono parametrizzare altri aperti di S^2.
(b) S^m è una varietà differenziabile di dimensione m.
(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = sen(\frac{1}{x})\}$ è una varietà differenziabile di dimensione 1.

1.2. Spazi tangenti e differenziale.

Lo strumento naturale che utilizzeremo per confrontare la topologia differenziale di due varietà differenziabili è quello del differenziale di un'applicazione differenziabile. La definizione passa attraverso quella di spazi tangenti. Iniziamo con gli aperti di $\mathbb{R}^k$.

DEFINIZIONE 1.5. *Siano $k, l \geq 0$, $U \subseteq \mathbb{R}^k$ e $V \subseteq \mathbb{R}^l$ due aperti non vuoti, $x \in U$.* **Lo spazio tangente ad U in x è** $T_x U = \mathbb{R}^k$. *Se $f : U \to V$ è un'applicazione differenziabile, il*

differenziale di f **in** x *è l'applicazione*

$$df_x : T_xU = \mathbb{R}^k \to T_{f(x)}V = \mathbb{R}^l$$

così definita, per ogni $v \in T_xU = \mathbb{R}^k$*:*

$$df_x(v) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}.$$

Osservazioni 1.6.

Siano $k, l, s \geq 0$, $U \subseteq \mathbb{R}^k, V \subseteq \mathbb{R}^l, W \subseteq \mathbb{R}^s$ aperti non vuoti, $x \in U$. Dimostriamo solo la (e) e la seconda affermazione della (a), il resto è lasciato al lettore per esercizio.

(a) df_x *è un'applicazione lineare e, se* $f(x_1, \ldots, x_k) = (f_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, f_l(x_1, \ldots, x_k))$*, la sua matrice, nelle basi canoniche, è*

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1\leq i\leq l, 1\leq j\leq k}.$$

Infatti se e_j è il j-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^k$ si ha

$$df_x(e_j) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+te_j)-f(x)}{t} = \left(\lim_{t\to 0} \tfrac{f_1(x+te_j)-f_1(x)}{t}, \ldots, \lim_{t\to 0} \tfrac{f_l(x+te_j)-f_l(x)}{t}\right) = \left(\tfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(x), \ldots, \tfrac{\partial f_l}{\partial x_j}(x)\right).$$

(b) Se $f : U \to V$ *e* $g : V \to W$ *sono differenziabili,* $x \in U$*, allora* $d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$.

(c) Se $U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^k$ *sono aperti,* $i : U \hookrightarrow V$ *è l'inclusione e* $x \in U$*, allora* $di_x = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^k}$.

(d) Se $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ *è un'applicazione lineare e* $x \in \mathbb{R}^k$*, allora* $dL_x = L$.

(e) Se $f : U \to V$ *è un diffeomorfismo allora* $k = l$ *e* $df_x : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ *è un isomorfismo.*

Infatti, in particolare, $f : U \to V$ è un omeomorfismo, quindi U è una varietà topologica di dimensione k ed l, pertanto $k = l$ per il Teorema di Invarianza della dimensione (Teorema 6.9). Inoltre se $g : V \to U$ è l'inverso differenziabile di f si ha $g \circ f = \mathrm{Id}_U$ quindi, per le (c) e (b), $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^k} = d(\mathrm{Id}_U)_x = d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$, da cui df_x è un isomorfismo.

La proprietà (e) ammette un inverso locale nel

Teorema 1.7 (Teorema della funzione inversa). *Siano* $k, l \geq 0$, $U \subseteq \mathbb{R}^k, V \subseteq \mathbb{R}^l$ *aperti non vuoti ed* $f : U \to V$ *un'applicazione differenziabile. Se* df_x *è non singolare in un punto* $x \in U$ *allora* f *mappa ogni aperto sufficentemente piccolo* U' *tale che* $x \in U' \subset U$ *diffeomorficamente in un aperto* $f(U')$.

Per una dimostrazione si veda per esempio [**B**, Teor.6.4]. Non si può invece, in generale, assumere molto di più, se df_x è non singolare. Per esempio la mappa $exp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $exp(x, y) = (e^x cos(y), e^x sen(y))$ ha differenziale

$$dexp_{(x,y)} = \begin{pmatrix} e^x cos(y) & e^x sen(y) \\ -e^x sen(y) & e^x cos(y) \end{pmatrix}$$

che ha per determinante $e^x \neq 0$ per ogni x. Pertanto $dexp_{(x,y)}$ è non singolare in ogni punto, ma exp non è iniettiva.

Definizione 1.8. *Sia* $M \subseteq \mathbb{R}^k$ *una varietà differenziabile di dimensione* m*,* $x \in M$ *e siano* $g : U \to M$ *una parametrizzazione di* M *in* x*, dove* $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *è un aperto e* $u \in U$ *tale che* $g(u) = x$*.* **Lo spazio tangente ad** M **in** x **è** $T_xM = dg_u(\mathbb{R}^m) = \mathrm{Im}\, dg_u$.

Osservazioni 1.9.

Sia $M \subseteq \mathbb{R}^k$ una varietà differenziabile di dimensione m e sia $x \in M$.

(a) La definizione di spazio tangente ad M in x è ben posta.

Infatti sia $h : V \to M$ un'altra parametrizzazione di M in x, dove $V \subseteq \mathbb{R}^m$ è un aperto e sia $v \in V$ tale che $h(v) = x$. Siano $U_1 = g^{-1}(g(U) \cap h(V))$ e $V_1 = h^{-1}(g(U) \cap h(V))$. Allora $g_{|U_1} : U_1 \to g(U) \cap h(V)$ e $h_{|V_1} : V_1 \to g(U) \cap h(V)$ sono diffeomorfismi, da cui $f := h^{-1}_{|V_1} \circ g_{|U_1} : U_1 \to V_1$ è un diffeomorfismo e c'è un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g_{|U_1}"'] & V_1 \arrow[d, "h_{|V_1}"] \\ & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

che determina, per l'Osservazione 1.6(b), un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "df_u", "\cong"'] \arrow[dr, "dg_u"'] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "dh_v"] \\ & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

ed essendo df_u un isomorfismo per l'Osservazione 1.6(e), ne segue che $dg_u(\mathbb{R}^m) = dh_v(\mathbb{R}^m)$.

(b) $\dim T_x M = m$.

Infatti consideriamo $g^{-1} : g(U) \to U$ che è differenziabile in $x = g(u) \in g(U)$, con $g(U) \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^k$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Dunque esiste un aperto $W \subseteq \mathbb{R}^k$ contenente x ed una funzione differenziabile $F : W \to \mathbb{R}^m$ tale che $g^{-1}_{|g(U)\cap W} = F_{|g(U)\cap W}$. Sia $U_0 = g^{-1}(g(U) \cap W) \subseteq \mathbb{R}^m$ in modo che $u \in U_0$ dato che $g(u) = x \in g(U) \cap W$ e quindi si hanno diagrammi commutativi

$$\begin{tikzcd} U_0 \arrow[r, "g_{|U_0}"] \arrow[dr, hook, "i"] & W \arrow[d, "F"] \\ & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "dg_u"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}"'] & \mathbb{R}^k \arrow[d, "dF_x"] \\ & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

che mostra che dg_u è iniettiva, da cui $\dim T_x M = \dim \operatorname{Im} dg_u = m$.

Ora passiamo a definire il differenziale di un'applicazione tra due varietà differenziabili.

Definizione 1.10. *Siano $M \subseteq \mathbb{R}^k$ una varietà differenziabile di dimensione m, $N \subseteq \mathbb{R}^l$ una varietà differenziabile, $f : M \to N$ un'applicazione differenziabile e sia $x \in M$. Sia $W \subseteq \mathbb{R}^k$ un aperto contenente x ed $F : W \to \mathbb{R}^l$ un'applicazione differenziabile tale che $f_{|W\cap M} = F_{|W\cap M}$. Il* **differenziale di f in** *x è l'applicazione*

$$df_x : T_x M \to T_{f(x)} N$$

così definita, per ogni $v \in T_xM$:

$$df_x(v) = dF_x(v).$$

Osservazione 1.11.
La definizione di differenziale di f in x è ben posta.
Mostriamo prima che per ogni $v \in T_xM$ si ha che $dF_x(v) \in T_{f(x)}N$. Siano $g : U \to M$ ed $h : V \to N$ due parametrizzazioni di M in x e di N in $f(x)$ rispettivamente. Restringendo opportunamente U se necessario possiamo supporre $g(U) \subseteq W$ (basta sostituire U con $U \cap g^{-1}(W)$) e $f(g(U)) \subseteq h(V)$ (basta sostituire U con $U \cap (f \circ g)^{-1}(h(V))$). Abbiamo allora un'applicazione differenziabile $\phi := h^{-1} \circ f \circ g : U \to V$ ed un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g"] & V \arrow[d, "h"] \\ W \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^l. \end{tikzcd}$$

che determina, per l'Osservazione 1.6(b), un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "d\phi_u"] \arrow[d, "dg_u"] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "dh_v"] \\ \mathbb{R}^k \arrow[r, "dF_x"] & \mathbb{R}^l. \end{tikzcd}$$

Per definizione, per ogni $v \in T_xM$, esiste $w \in \mathbb{R}^m$ tale che $v = dg_u(w)$, quindi

$$dF_x(v) = dF_x \circ dg_u(w) = dh_v \circ d\phi_u(w) \in \operatorname{Im} dh_v = T_{f(x)}N.$$

Inoltre questo mostra che $dF_x(v)$ non dipende dalla scelta di F, ma solo da f, e quindi la definizione di differenziale di f in x è ben posta.

Esercizi 1.12.
(a) Siano $f : M \to N$ e $g : N \to P$ due applicazioni differenziabili tra varietà differenziabili e sia $x \in M$. Allora $d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$.
(b) Sia $i : M \hookrightarrow N$ l'inclusione tra due varietà differenziabili e sia $x \in M$. Allora $T_xM \subseteq T_xN$ e $di_x : T_xM \to T_xN$ è l'inclusione. In particolare $d(\mathrm{Id}_M)_x = \mathrm{Id}_{T_xM}$.
(c) Se $f : M \to N$ è un diffeomorfismo allora $\dim M = \dim N$ e $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ è un isomorfismo.

2. Valori regolari di applicazioni differenziabili

Data un'applicazione differenziale $f : M \to N$ tra due varietà differenziabili studieremo, in questo paragrafo, i punti della fibra $f^{-1}(y)$ per $y \in N$.

Definizione 2.1. *Sia $f : M \to N$ un'applicazione differenziabile tra due varietà differenziabili della stessa dimensione. Un punto $x \in M$ si dice un* **punto regolare di** f *(rispettivamente* **punto critico di** f*) se df_x è non singolare (risp. è singolare). Un punto $y \in N$ si dice un* **valore regolare di** f *se ogni $x \in f^{-1}(y)$ è regolare.*

OSSERVAZIONI 2.2.

Sia $f : M \to N$ *un'applicazione differenziabile tra varietà differenziabili con* M *compatta e sia* $y \in N$ *un valore regolare di* f*. Allora:*

(a) $f^{-1}(y)$ *è un insieme finito (possibilmente vuoto).*

Infatti f è continua e $\{y\}$ è chiuso in N, quindi $f^{-1}(y)$ è chiuso in M che è compatta, pertanto $f^{-1}(y)$ è compatto. Se non è vuoto, essendo ogni ogni $x \in f^{-1}(y)$ regolare, per il Teorema della funzione inversa (Teorema 1.7), f è un diffeomorfismo in un intorno di x, in particolare è iniettiva e quindi $f^{-1}(y)$ è discreto. Ma allora è finito.

(b) La cardinaltà $\#f^{-1}(y)$ *di* $f^{-1}(y)$ *è localmente costante.*

Iniziamo ad osservare che, essendo M compatta ed N di Hausdorff, ne segue che f è chiusa. Ora se $f^{-1}(y)$ è vuoto allora $y \in N - f(M)$ che è aperto e $\#f^{-1}(y') = 0 = \#f^{-1}(y)$ per ogni in $y' \in N - f(M)$. Invece se $f^{-1}(y)$ non è vuoto sia $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_s\}$. Come visto sopra, per ogni $i \in \{1, \ldots, s\}$, c'è un aperto U_i contenente x_i tale che $f_{|U_i} : U_i \to V_i := f(U_i)$ è un diffeomorfismo. Inoltre, restringendo opportunamente gli U_i, possiamo supporre che $U_i \cap U_j = \emptyset$ se $i \neq j$ (si noti che $x_i \notin U_j$ per ogni $j \neq i$ e che, eventualmente sostituendo U_j con un disco di raggio piccolo, possiamo assumere anche che $x_i \notin \overline{U}_j$ e quindi basta sostituire U_i con $U_i - \bigcup_{j \neq i} \overline{U}_j$). Si consideri ora

$$V = V_1 \cap \ldots \cap V_s - f(M - U_1 \cup \ldots \cup U_s).$$

Allora $y \in V$ e V è aperto. Inoltre se $y' \in V$ allora $y' \in V_i$ per ogni $i \in \{1, \ldots, s\}$, quindi c'è un $x'_i \in U_i$ tale che $f(x'_i) = y'$. Sia ora $x \in f^{-1}(y')$. Se $x \in M - U_1 \cup \ldots \cup U_s$ si ha la contraddizione $y' \in f(M - U_1 \cup \ldots \cup U_s)$. Pertanto $x \in U_i$ per qualche i. Ma $f_{|U_i}(x) = y' = f_{|U_i}(x'_i)$, quindi $x = x'_i$. Ne segue allora che $\#f^{-1}(y') = s = \#f^{-1}(y)$ per ogni $y' \in V$.

Ora diamo la definizione generale di valore regolare.

DEFINIZIONE 2.3. *Sia* $f : M \to N$ *un'applicazione differenziabile tra due varietà differenziabili. Un punto* $x \in M$ *si dice un* **punto critico di** f *se* df_x *non è suriettivo (ovvero se* $\operatorname{rk} df_x < \dim N$*). Sia* C *l'insieme dei punti critici di* f*. Un punto* $y \in N$ *si dice un* **valore regolare di** f *(rispettivamente un* **valore critico di** f*) se* $y \notin f(C)$ *(risp. se* $y \in f(C)$*).*

Un fatto molto importante, nel seguito, è che i valori regolari sono densi. Ciò è conseguenza dei risultati seguenti, per la dimostrazione dei quali rimandiamo a [**Mi1**, §3] e [**T**].

TEOREMA 2.4 (Teorema di Sard). *Sia* $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *un aperto non vuoto e sia* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *un'applicazione differenziabile. L'insieme dei valori critici di* f *ha misura (di Lebesgue) zero in* $\mathbb{R}^n$*.*

Sia C l'insieme dei valori critici di f. Si noti che il teorema è più interessante nel caso $m \geq n$, in quanto se $m < n$ allora $C = U$. Inoltre il teorema implica che $\mathbb{R}^n - f(C)$ è denso in $\mathbb{R}^n$ (altrimenti ci sarebbe un aperto non vuoto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $V \cap (\mathbb{R}^n - f(C)) = \emptyset$ e quindi $V \subseteq f(C)$, che avrebbe allora misura positiva).

COROLLARIO 2.5 (Teorema di Brown). *Sia* $f : M \to N$ *un'applicazione differenziabile tra due varietà differenziabili. L'insieme dei valori regolari di* f *è denso in* N*.*

Per utilizzare al meglio questi teoremi studieremo la struttura delle fibre, sui valori regolari, delle applicazioni differenziabili.

Lemma 2.6. *Sia $f : M \to N$ un'applicazione differenziabile tra due varietà differenziabili di dimensioni m ed n rispettivamente, con $m \geq n$. Se $y \in N$ è un valore regolare di f, allora $f^{-1}(y)$ è una varietà differenziabile di dimensione $m - n$.*

Dim. Sia $x \in f^{-1}(y)$. Allora df_x è suriettivo, quindi $\operatorname{Ker} df_x$ ha dimensione $m-n$. Sia $M \subseteq \mathbb{R}^k$ e scegliamo un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{m-n}$ tale che $L_{|\operatorname{Ker} df_x}$ induce un isomorfismo tra $\operatorname{Ker} df_x$ e $\mathbb{R}^{m-n}$ (basta scegliere una base $\{v_1, \ldots, v_{m-n}\}$ di $\operatorname{Ker} df_x$, completarla ad una base $\{v_1, \ldots, v_k\}$ di $\mathbb{R}^k$ e definire $L(v_i) = E_i$ per $i = 1, \ldots, m - n$ e $L(v_i) = 0$ per $i = m - n + 1, \ldots, k$). Ora definiamo un'applicazione $F : M \to N \times \mathbb{R}^{m-n}$ al modo seguente:

$$F(x) = (f(x), L(x)).$$

Allora F è differenziabile e, per ogni $v \in T_xM$, si ha $dF_x(v) = (df_x(v), L(v))$. Ma allora dF_x è non singolare: se $dF_x(v) = 0$ allora $df_x(v) = L(v) = 0$. Quindi $v \in \operatorname{Ker} df_x$ e $L(v) = 0$ implica che $v = 0$. Quindi dF_x è iniettiva tra spazi della stessa dimensione, quindi suriettiva, cioè non singolare. Per il Teorema della funzione inversa (Teorema 1.7) c'è un intorno U di x che viene mandato diffeomorficamente da F in un intorno V di $y = F(x) = (f(x), L(x))$. Se $u \in f^{-1}(y) \cap U$ allora $F(u) = (y, L(u)) \in \{y\} \times \mathbb{R}^{m-n}$ e $F(u) \in V$. Ne segue che $F_{|f^{-1}(y)\cap U} : f^{-1}(y) \cap U \to (\{y\} \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap V$ è un diffeomorfismo e quindi $f^{-1}(y)$ è una varietà differenziabile di dimensione $m - n$. ■

Visto ora che, se $y \in N$ è un valore regolare di f, allora $f^{-1}(y)$ è una varietà differenziabile di dimensione $m - n$, è naturale trovarne lo spazio tangente. Premettiamo prima però la

Definizione 2.7. *Sia $i : M \hookrightarrow N \subseteq \mathbb{R}^k$ l'inclusione tra due varietà differenziabili e sia $x \in M$. Allora (vedasi Esercizio 1.12(b)) $T_xM \subseteq T_xN$. Lo* **spazio dei vettori normali ad** *M* **in** *x è $N_xM = (T_xM)^\perp = \{v \in T_xN : v \cdot w = 0$ per ogni $w \in T_xM\}$ (dove $v \cdot w$ denota il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^k$).*

Lemma 2.8. *Sia $f : M \to N$ un'applicazione differenziabile tra due varietà differenziabili di dimensioni m ed n rispettivamente, con $m \geq n$. Sia $y \in N$ un valore regolare di f e sia $x \in f^{-1}(y)$. Allora $T_xf^{-1}(y) = \operatorname{Ker} df_x$ e df_x induce un isomorfismo tra $N_xf^{-1}(y)$ e T_yN.*

Dim. Il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(y) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[d, "f"] \\ \{y\} \arrow[r, hook, "j"] & N \end{tikzcd}$$

determina, per l'Osservazione 1.6(b), un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} T_xf^{-1}(y) \arrow[r, hook, "di_x"] \arrow[d, "df'_x"] & T_xM \arrow[d, "df_x"] \\ T_x\{y\} \arrow[r, hook, "dj_y"] & T_yN. \end{tikzcd}$$

Ma ovviamente, $T_x\{y\} = \{0\}$, quindi, per ogni $v \in T_xf^{-1}(y)$, si ha

$$df_x(v) = df_x \circ di_x(v) = dj_y \circ df'_x(v) = 0$$

da cui $v \in \operatorname{Ker} df_x$. Quindi $T_xf^{-1}(y) \subseteq \operatorname{Ker} df_x$ e, per il Lemma 2.6 e l'Osservazione 1.9(b), hanno la stessa dimensione e pertanto $T_xf^{-1}(y) = \operatorname{Ker} df_x$. Ora visto che $N_xf^{-1}(y) =$

$(T_xf^{-1}(y))^\perp = (\mathrm{Ker}\, df_x)^\perp$ ha dimensione $m-(m-n)=n$, per mostrare la seconda parte del lemma basterà far vedere che $(df_x)_{|N_xf^{-1}(y)}$ è iniettiva. Ma questo è ovvio dato che se $v \in N_xf^{-1}(y)$ è tale che $df_x(v)=0$, allora $v \in \mathrm{Ker}\, df_x \cap (\mathrm{Ker}\, df_x)^\perp = \{0\}$. ■

2.1. Varietà differenziabili con bordo.

Definizione 2.9. *Sia $m \geq 1$ e sia $\mathbb{H}_m = \{(x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m \geq 0\}$ il semispazio superiore con bordo $\partial\mathbb{H}_m = \{(x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m = 0\}$. Un sottoinsieme $M \subseteq \mathbb{R}^k$ si dice* **una varietà differenziabile di dimensione** *m* **con bordo** *se per ogni $x \in M$ esiste un intorno $W \cap M$ di x che è diffeomorfo ad un aperto $U \cap \mathbb{H}_m$ di $\mathbb{H}_m$. Il* **bordo di** *M, ∂M, è l'insieme dei punti che, tramite questi diffeomorfismi, corrispondono a punti in $\partial\mathbb{H}_m$. L'***interno di** *M è $\mathrm{Int}\, M = M - \partial M$. Nel seguito quando diremo* **varietà differenziabile** *intenderemo che non ha bordo.*

Esercizi 2.10. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m con bordo. Allora
(a) ∂M è una varietà differenziabile di dimensione $m-1$.
(b) $\mathrm{Int}\, M$ è una varietà differenziabile di dimensione m.
(c) Per ogni $x \in M$, usando una parametrizzazione, si possono definire, come sopra le nozioni di spazio tangente e di valore regolare.

Un modo standard di produrre varietà con bordo è il seguente.

Lemma 2.11. *Sia M una varietà differenziabile e $g : M \to \mathbb{R}$ un'applicazione differenziabile. Se $0 \in \mathbb{R}$ è un valore regolare di g, allora $\{x \in M : g(x) \geq 0\}$ è una varietà differenziabile con bordo $g^{-1}(0)$.*

Dim. La dimostrazione, analoga a quella del Lemma 2.6, è lasciata al lettore per esercizio. ■

Lemma 2.12. *Siano M una varietà differenziabile di dimensione m con bordo, N una varietà differenziabile di dimensione n con bordo e sia $m > n$. Sia $f : M \to N$ un'applicazione differenziabile ed $y \in N$ un valore regolare di f e di $f_{|\partial M}$. Allora $f^{-1}(y)$ è una varietà differenziabile di dimensione $m-n$ con bordo $\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial M$.*

Dim. Iniziamo col far vedere che la proprietà da dimostrare è locale, cioè che possiamo assumere che

$$(*) \qquad M = V \cap \mathbb{H}^m, N = \mathbb{R}^n, f : V \cap \mathbb{H}^m \to \mathbb{R}^n,$$

dove V è un aperto di $\mathbb{R}^m$e $y \in \mathbb{R}^n$ è un valore regolare di f e di $f_{|V\cap\partial\mathbb{H}^m}$.

Infatti sia $x \in f^{-1}(y)$. Allora esiste un intorno $W \cap M$ di x diffeomorfo ad un aperto $V \cap \mathbb{H}^m$ di $\mathbb{H}^m$ ed esiste un intorno $W' \cap N$ di y diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{H}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ e restringendo W possiamo assumere che $f(W \cap M) \subseteq W' \cap N$. Componendo f con i due diffeomorfismi (che non cambiano la regolarità dei punti, nè la fibra in un intorno) abbiamo una nuova applicazione $f' : V \cap \mathbb{H}^m \to \mathbb{R}^n$ tale che $y \in \mathbb{R}^n$ è un valore regolare di f' e di $f'_{|V\cap\partial\mathbb{H}^m}$. Pertanto $(*)$ è dimostrata e la assumiamo. Sia $x \in f^{-1}(y)$. Se x è un punto interno a $V \cap \mathbb{H}^m$ allora, come nella dimostrazione del Lemma 2.6, si ha che $f^{-1}(y)$ ha un intorno di x diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^{m-n}$. Se invece $x \in \partial\mathbb{H}^m$ sia $F : U \to \mathbb{R}^n$ una funzione differenziabile, dove U è un aperto di $\mathbb{R}^m$ contenente x e F coincide con f su $U \cap V \cap \mathbb{H}^m$. Restringendo U possiamo assumere che F non ha punti critici su U e su $U \cap \partial\mathbb{H}^m$: infatti sappiamo per ipotesi che sia dF_x che $d(F_{|U\cap\partial\mathbb{H}^m})_x$ hanno rango n, dunque la loro matrice ha un minore $n \times n$ non nullo in

x, quindi per continuità, non nullo in un intorno di x. Ma allora dF_x e $d(F_{|U\cap\partial\mathbb{H}^m})_x$ hanno rango n in un intorno di x ed in tale intorno non ci sono punti critici di F e di $F_{|U\cap\partial\mathbb{H}^m}$. Sia ora $g = F_{|U\cap V} : U \cap V \to \mathbb{R}^n$. Per il Lemma 2.6, $g^{-1}(y)$ è una varietà differenziabile di dimensione $m-n$. Sia $\pi : g^{-1}(y) \to \mathbb{R}$ la proiezione nella m-esima coordinata e mostriamo che $0 \in \mathbb{R}$ è un valore regolare di π. Se $z \in \pi^{-1}(0)$, per il Lemma 2.8, $T_z g^{-1}(y) = \operatorname{Ker} dg_z$ e occorre far vedere che $d\pi_z : T_z g^{-1}(y) \to \mathbb{R}$ è suriettiva, ovvero che $d\pi_z : \operatorname{Ker} dg_z \to \mathbb{R}$ è non nulla. Sia $\overline{\pi} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ la proiezione nella m-esima coordinata e consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} g^{-1}(y) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\pi"] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "\overline{\pi}"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

che determina

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} dg_z \arrow[r, hook, "di_z"] \arrow[dr, "d\pi_z"'] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "d\overline{\pi}_z"] \\ & \mathbb{R}^n. \end{tikzcd}$$

Ma $\overline{\pi}$ è lineare, quindi, per l'Osservazione 1.6(d), si ha che $d\overline{\pi}_z = \overline{\pi}$ e di_z, per l'Esercizio 1.12(b), è l'inclusione, quindi $d\pi_z = \overline{\pi}_{|\operatorname{Ker} dg_z}$ e pertanto $d\pi_z$ è non nulla se e solo se

$$\operatorname{Ker} dg_z \not\subseteq \operatorname{Ker} \overline{\pi} = \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}.$$

Per vedere quest'ultimo fatto, sia $h = g_{|U\cap V\cap\partial\mathbb{H}^m}$ e sia $j : U \cap V \cap \partial\mathbb{H}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ l'inclusione, così che $j((x_1,\dots,x_{m-1})) = (x_1,\dots,x_{m-1},0)$. Si ha il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} U\cap V\cap\partial\mathbb{H}^m \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "h"] & U\cap V \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

che determina

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{m-1} \arrow[r, hook, "dj_z"] \arrow[dr, "dh_z"'] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "dg_z"] \\ & \mathbb{R}^n. \end{tikzcd}$$

Ma j è lineare, quindi $dj_z = j$ e sappiamo che dh_z è suriettiva in quanto $g_{|U\cap V\cap\partial\mathbb{H}^m}$ è regolare in z. Allora sia $v = (0,\dots,0,1) \in \mathbb{R}^m$ e sia $w \in \mathbb{R}^{m-1}$ tale che $dh_z(w) = -dg_z(v)$. Ne segue che

$$dg_z(v + j(w)) = dg_z(v) + dg_z(j(w)) = dg_z(v) + dh_z(w) = 0$$

e quindi $v + j(w) \in \operatorname{Ker} dg_z - \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$. Allora abbiamo dimostrato che $0 \in \mathbb{R}$ è un valore regolare di π. Ma ora $f^{-1}(y) \cap U = g^{-1}(y) \cap \mathbb{H}^m = \{(x_1,\dots,x_m) \in g^{-1}(y) : x_m \geq 0\} = \{z \in g^{-1}(y) : \pi(z) \geq 0\}$ che, per il Lemma 2.11, è una varietà differenziabile con bordo $\pi^{-1}(0) = f^{-1}(y) \cap U \cap \partial\mathbb{H}^m$. ∎

3. Grado di applicazioni differenziabili

3.1. Parità della cardinalità delle fibre di applicazioni differenziabili.

Sia $f : M \to N$ un'applicazione differenziabile tra due varietà differenziabili della stessa dimensione con M compatta ed N connessa. Sia $y \in N$ un valore regolare di f. Allora, come visto nell'Osservazione 2.2, $f^{-1}(y)$ è un insieme finito (possibilmente vuoto) e $\#f^{-1}(y)$ è localmente costante. Vedremo ora che la parità $\#f^{-1}(y)$ è indipendente da y. A tale scopo sarà utile la seguente

Definizione 3.1. *Siano $X \subseteq \mathbb{R}^k$ ed $Y \subseteq \mathbb{R}^l$ due sottoinsiemi, in modo che $X \times I \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$. Due applicazioni $f : X \to Y, g : X \to Y$ si dicono* **differenziabilmente omotope***, denotato $f \simeq_{diff} g$, se esiste un'applicazione differenziabile (detta* **omotopia differenziabile tra f e g***) $F : X \times I \to Y$ tale che $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$, per ogni $x \in X$.*

Osservazione 3.2.
La relazione $\simeq_{diff}$ è d'equivalenza.
Infatti posto $F(x,t) = f(x)$ si ha che $f \simeq_{diff} f$, mentre se $f \simeq_{diff} g$ e $F(x,t)$ è un'omotopia differenziabile tra esse, allora $G(x,t) = F(x, 1-t)$ mostra che $g \simeq_{diff} f$. Siano ora $f \simeq_{diff} g$ e $g \simeq_{diff} h$ con due omotopie differenziabili $F(x,t)$ e $G(x,t)$, rispettivamente. Sia $\varphi : I \to I$ una funzione differenzibile tale che $\varphi(t) = 0$ per $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$ e $\varphi(t) = 1$ per $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$. Per esempio, posto, per $t \in \mathbb{R}$, $\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} & \text{if } t > 0 \end{cases}$, definiamo

$$\varphi(t) = \frac{\lambda(t - \frac{1}{3})}{\lambda(t - \frac{1}{3}) + \lambda(\frac{2}{3} - t)}.$$

Allora si ottiene un'omotopia differenziabile tra f ed h ponendo

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, \varphi(2t)) & \text{if } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, \varphi(2t-1)) & \text{if } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Per i diffeomorfismi abbiamo invece la

Definizione 3.3. *Siano $X \subseteq \mathbb{R}^k$ ed $Y \subseteq \mathbb{R}^l$ due sottoinsiemi e siano $f : X \to Y, g : X \to Y$ due diffeomorfismi. f e g si dicono* **differenziabilmente isotope***, denotato $f \simeq_{isot} g$, se esiste un'omotopia differenziabile F tra f e g tale che, per ogni $t \in I$, l'applicazione $F_t : X \to Y$ definita da $F_t(x) = F(x,t)$, è un diffeomorfismo. F è detta* **isotopia differenziabile tra f e g**.

Lemma 3.4 (Lemma di omotopia). *Siano $f : M \to N$ e $g : M \to N$ due applicazioni differenziabili tra due varietà differenziabili della stessa dimensione con M compatta ed N con bordo. Se f e g sono differenziabilmente omotope ed $y \in N$ è un valore regolare di f e g, allora*

$$\#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) (mod\ 2).$$

Dim. Sia $F : M \times I \to N$ un'omotopia differenziabile tra f e g. Distingiuamo due possibilità:
Caso 1: y è un valore regolare di F;
Caso 2: y non è un valore regolare di F.

Nel Caso 1, dal Lemma 2.12, segue che $F^{-1}(y)$ è una varietà differenziabile di dimensione $\dim(M \times I) - \dim N = \dim M + 1 - \dim N = 1$ con bordo

$$F^{-1}(y) \cap \partial(M \times I) = F^{-1}(y) \cap \big((M \times \{0\}) \amalg (M \times \{1\})\big) = (f^{-1}(y) \times \{0\}) \amalg (g^{-1}(y) \times \{1\}).$$

Ne segue che

$$\#\partial F^{-1}(y) = \#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y)$$

e l'asserto sarà provato se mostriamo che

$$\#\partial F^{-1}(y) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2).$$

Ora $F^{-1}(y)$ è chiuso in un compatto, quindi compatto. Ma una varietà differenziabile di dimensione 1 è diffeomorfa ad un'unione disgiunta di segmenti e circonferenze (si veda [**Mi1**, Appendice]). Pertanto, essendo compatta, ha un numero pari di punti di bordo, da cui $\#\partial F^{-1}(y) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$.

Nel Caso 2 siano V e W due intorni di y in N nei quali $\#f^{-1}(y)$ e $\#g^{-1}(y)$ sono costanti (tali intorni esistono per l'Osservazione 2.2(b)). Per il Teorema di Brown (Teorema 2.5), c'è un valore regolare z di F in $V \cap W$ e quindi, per il Caso 1,

$$\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(z) \equiv g^{-1}(z) = \#g^{-1}(y) (\mathrm{mod}\ 2). \qquad \blacksquare$$

Il lemma seguente è cruciale per lo studio del grado modulo 2. Ne daremo una dimostrazione diretta. Una dimostrazione alternativa si può trovare in [**GP**, Isotopy Lemma, pag. 142].

Lemma 3.5 (Lemma di omogeneità). *Sia M una varietà differenziabile connessa con bordo e siano $x, y \in \mathrm{Int}\, M$. Allora esiste un diffeomorfismo $h : M \to M$ tale che*

(i) $h \simeq_{isot} \mathrm{Id}_M$, *e*
(ii) $h(y) = z$.

Dim. Iniziamo a costruire una famiglia di diffeomorfismi di $\mathbb{R}^n$ in sè tali che fissano i punti fuori del disco chiuso di raggio 1, $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$ e mandano l'origine in ogni punto scelto in un opportuno disco $D_\varepsilon(0)$. Sia $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile tale che $\psi(x) > 0$ se $||x|| < 1$ e $\psi(x) = 0$ se $||x|| \geq 1$ (per esempio possiamo scegliere $\psi(x) = \lambda(1 - ||x||)$, dove λ è la funzione definita nell'Osservazione 3.2). Per ogni $c \in \mathbb{R}^n$ consideriamo il sistema di equazioni differenziali

$$(*) \quad \frac{dx_i}{dt} = c_i \psi(x_1, \ldots, x_n), 1 \leq i \leq n.$$

Per il Teorema di esistenza ed unicità delle equazioni differenziali [**B**, Teor.4.1], per ogni $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ c'è un'unica soluzione $x(t)$ del sistema, definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ (vedasi [**Mi2**, §2.4]), tale che $x(0) = \overline{x}$. Posto $F_t(\overline{x}) = x(t)$ si definisce, per ogni $t \in \mathbb{R}$, un'applicazione $F_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Il Teorema di esistenza ed unicità delle equazioni differenziali implica che $F_t(\overline{x})$ è una funzione differenziabile di t e $\overline{x}$. Inoltre $F_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$, in quanto $F_0(\overline{x}) = x(0) = \overline{x}$. Per ogni $s, t \in \mathbb{R}$ si ha $F_{s+t} = F_s \circ F_t$, perchè, per ogni $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, fissato t, $F_s(F_t(\overline{x})) = F_s(x(t))$ è la soluzione del sistema

$$\frac{dy_i}{ds} = c_i \psi(y_1, \ldots, y_n), 1 \leq i \leq n$$

con condizione iniziale $y(0) = x(t)$, ma anche $x(s+t)$ lo è, da cui

$$F_s(F_t(\overline{x})) = F_s(x(t)) = x(s+t) = F_{s+t}(\overline{x}).$$

Allora ogni F_t è un diffeomorfismo (il suo inverso è F_{-t}) che è differenziabilmente isotopo all'identità. Infine facciamo vedere che, scegliendo opportunamente c e t, si può far in modo che $F_t(0)$ è un qualsiasi punto di un opportuno disco $D_\varepsilon(0)$. Sia $m \in \mathbb{N}$ tale che $m \gg 0$ e sia $\varepsilon = \frac{1}{e} - \frac{1}{m}$ e $a = 1 + \frac{1}{ln(\varepsilon)}$, dove $ln(\varepsilon)$ è il logaritmo naturale di ε. Se $||x|| = a$ allora $1 - ||x|| = -\frac{1}{ln(\varepsilon)}$ e quindi $\psi(x) = \lambda(1 - ||x||) = \varepsilon$. Allora la funzione $x_1(t) = \varepsilon ct$ è soluzione di $(*)$ e soddisfa $x_1(0) = 0$, quindi $x_1(t) = x(t)$ sulla sfera S_a. Ma allora $x(1) = c\varepsilon$, e, al variare di c, si ottiene un qualsiasi punto del disco $D_\varepsilon(0)$.

Ora consideriamo due punti $z, z' \in \operatorname{Int} M$. Diremo che z è in relazione con z' se esiste un diffeomorfismo $h : M \to M$ tale che $h \simeq_{isot} \mathrm{Id}_M$ e $h(z) = z'$. Tale relazione è certamente di equivalenza e notiamo che, usando la costruzione precedente, si ha che se $x \in \operatorname{Int} M$ allora, preso un intorno diffeomorfo ad $\mathbb{R}^m$, ogni punto sufficentemente vicino ad x è equivalente ad x. Ma allora la classe di equivalenza di ogni $x \in \operatorname{Int} M$ è aperta. Dato che M è connessa ne segue che $\operatorname{Int} M$ lo è e quindi ha un'unica classe di equivalenza, cioè ogni coppia di punti sono equivalenti. ■

Definizione 3.6. *Sia $f : M \to N$ un'applicazione differenziabile tra due varietà differenziabili della stessa dimensione con M compatta ed N connessa con bordo. Il* **grado modulo 2 di** *f, denotato $\deg_2 f$, è la classe modulo 2 di $\#f^{-1}(y)$, dove $y \in N$ è un qualsiasi valore regolare di f.*

Il risultato seguente mostra che la definizione di grado modulo 2 è ben posta e dipende solo dalla classe di omotopia differenziabile di f.

Teorema 3.7. *Sia $f : M \to N$ un'applicazione differenziabile tra due varietà differenziabili della stessa dimensione con M compatta ed N connessa con bordo. Siano $y, z \in N$ due valori regolari di f. Allora*
$$\#f^{-1}(y) \equiv \#f^{-1}(z) (\text{mod } 2).$$
Inoltre $\deg_2 f$ dipende solo dalla classe di omotopia differenziabile di f.

Dim. Per l'Osservazione 2.2(b) esiste un intorno V di y in N nel quale $\#f^{-1}(y)$ è costante. Se $y \in \partial N$, essendo $V \cap \operatorname{Int} N \neq \emptyset$, per il Teorema di Brown (Teorema 2.5) c'è un valore regolare y' di f in $V \cap \operatorname{Int} N$, quindi abbiamo $\#f^{-1}(y') = \#f^{-1}(y)$. Analogamente possiamo fare per z e dunque possiamo assumere che $y, z \in \operatorname{Int} N$. Per il Lemma di omogeneità (Lemma 3.5) esiste un diffeomorfismo $h : N \to N$ tale che $h(y) = z$ e $h \simeq_{isot} \mathrm{Id}_N$. Allora z è un valore regolare di $h \circ f$ e $h \circ f \simeq_{diff} f$. Il Lemma di omotopia (Lemma 3.4) mostra allora che $\#(h \circ f)^{-1}(z) \equiv \#f^{-1}(z)(\text{mod } 2)$. Ma ovviamente $(h \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(h^{-1}(z)) = f^{-1}(y)$ da cui $\#f^{-1}(y) \equiv \#f^{-1}(z)(\text{mod } 2)$. Sia ora $g : M \to N$ un'applicazione differenziabile tale che $f \simeq_{diff} g$. Dato che y è un valore regolare di f, come nella dimostrazione del Lemma 2.12, c'è un intorno W di y in N che contiene solo valori regolari di f. Per il Teorema di Brown (Teorema 2.5) c'è un valore regolare y' di g in $V \cap W$, quindi y' lo è anche di f. Per il Lemma di omotopia (Lemma 3.4) si ha che $\#f^{-1}(y') \equiv \#g^{-1}(y')(\text{mod } 2)$, cioè $\deg_2 f = \deg_2 g$. ■

3.2. Varietà orientate.

Ricordiamo prima la

Definizione 3.8. *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione $n \geq 1$. Due basi $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\{w_1, \ldots, w_n\}$ di V si dicono* **concordemente orientate** *(rispettivamente* **discordemente orientate***) se il determinante della matrice di cambio di base è positivo (risp.*

*negativo). Un'***orientazione di** V *è una scelta di classe di equivalenza di basi orientate. Se* $V = \{0\}$ *un'***orientazione di** V *sarà un simbolo* $+1$ *o* -1 *associato a* V*. L'***orientazione standard di** $\mathbb{R}^n$ *è quella definita dalla base canonica* $\{E_1, \ldots, E_n\}$*.*

Definizione 3.9. *Una* **varietà differenzibile orientata** *(con bordo) è una varietà differenzibile* M *di dimensione* m *con una scelta di orientazione in* T_xM*, per ogni* $x \in M$ *tale che, se* $m \geq 1$*, per ogni* $x \in M$ *esiste un intorno* U *di* x *in* M *ed un diffeomorfismo* h *di* U *in un aperto di* $\mathbb{R}^m$ *(o di* $\mathbb{H}^m$*) che preserva l'orientazione, cioè tale che, per ogni* $u \in U$*,* dh_u *manda l'orientazione scelta in* T_xM *in quella standard di* $\mathbb{R}^m$*. Una varietà differenzibile (con bordo) si dice* **orientabile** *se possiede un'orientazione.*

Osservazioni 3.10. Sia M una varietà differenziabile (con bordo) di dimensione $m \geq 1$.
(a) Se M è connessa ed orientabile allora ha solo due possibili orientazioni.
(b) Sia M con bordo, $x \in \partial M$ e sia g una parametrizzazione di M in x. Possiamo distinguere tre tipi diversi di vettori tangenti ad M in x: (i) vettori tangenti a ∂M (sono i vettori in $T_x\partial M \subseteq T_xM$). (ii) vettori tangenti che "puntano fuori" di ∂M (sono i vettori del tipo $dg_u(v)$, dove v punta fuori da $\mathbb{H}^m$). (iii) vettori tangenti che "puntano dentro" ∂M (sono i vettori del tipo $dg_u(v)$, dove v punta dentro $\mathbb{H}^m$).
(c) Un'orientazione di M induce, al modo seguente, un'orientazione di ∂M: se $x \in \partial M$ una base $\{v_2, \ldots, v_m\}$ di $T_x\partial M$ è positivamente orientata se $\{v_1, \ldots, v_m\}$ è una base positivamente orientata di T_xM per ogni v_1 che punta fuori di ∂M.

3.3. Il grado di Brouwer.

Definizione 3.11. *Sia* $f : M \to N$ *un'applicazione differenziabile tra due varietà differenziabili orientate della stessa dimensione con* M *compatta ed* N *connessa. Sia* $x \in M$ *un punto regolare di* f*. Il* **segno di** df_x *è*

$$\textit{segno}(df_x) = \begin{cases} 1 & \textit{se } df_x \ \ \textit{preserva l'orientazione} \\ -1 & \textit{se } df_x \ \ \textit{cambia l'orientazione.} \end{cases}$$

Sia $y \in N$ *un valore regolare di* f*. Il* **grado di** f **in** y *è*

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \textit{segno}(df_x)$$

Nella definizione precedente si noti che, essendo x un punto regolare di f, df_x è suriettiva, ma, avendo le due varietà la stessa dimensione, df_x è un isomorfismo, quindi manda una base di T_xM in una base di $T_{f(x)}N$ ed ha senso parlare di df_x che preserva o cambia l'orientazione. Vedremo inoltre, nei prossimi risultati, che $\deg(f, y)$ non dipende da y, nè da f, ma solo dalla classe di omotopia differenziabile di f.

Esercizi 3.12.
(a) Sia $f : M \to N$ un'applicazione differenziabile tra due varietà differenziabili orientate della stessa dimensione con M compatta ed N connessa. Sia $y \in N$ un valore regolare di f. Il grado di f in y è localmente costante.
(b) Sia $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, sia $k \in \mathbb{N}$ e sia $f : S^1 \to S^1$ definita da $f(z) = z^k$. Allora $\deg(f, y) = k$ per ogni $y \in S^1$ valore regolare di f.

Lemma 3.13. *Siano X una varietà orientata compatta con bordo e sia $M = \partial X$ orientata compatibilmente ad X (nel senso dell'Osservazione 3.10(c)). Sia $f : M \to N$ un'applicazione differenziabile dove N è una varietà differenziabile della stessa dimensione di M, M è compatta ed N è connessa. Se f si estende ad un'applicazione differenziabile $F : X \to N$ allora $\deg(f, y) = 0$ per ogni $y \in N$ valore regolare di f.*

Dim. Distinguiamo due possibilità:

Caso 1: y è un valore regolare di F;

Caso 2: y non è un valore regolare di F.

Nel Caso 1, dal Lemma 2.12 e dall'Esercizio 2.10(a), segue che $F^{-1}(y)$ è una varietà differenziabile di dimensione $\dim X - \dim N = \dim M + 1 - \dim N = 1$ con bordo $\partial F^{-1}(y) = F^{-1}(y) \cap M$. Ora $F^{-1}(y)$ è chiuso in un compatto, quindi compatto. Ma una varietà differenziabile di dimensione 1 è diffeomorfa ad un'unione disgiunta di segmenti e circonferenze (si veda [**Mi1**, Appendice]). Pertanto, essendo compatta, ogni arco $A \subseteq F^{-1}(y)$ avrà due punti di bordo $\{a, b\}$. Mostreremo che

$$(*) \quad \text{segno}(df_a) + \text{segno}(df_b) = 0.$$

Ora facciamo vedere che $(*)$ implica la tesi del lemma nel Caso 1:

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{segno}(df_x) = \sum_{x \in F^{-1}(y) \cap M} \text{segno}(df_x) = \sum_{A \subseteq F^{-1}(y), x \in \partial A} \text{segno}(df_x) = 0$$

per $(*)$. Ora mostriamo $(*)$. Iniziamo a stabilire un'orientazione su ogni arco A. Sia $n = \dim M = \dim N$. Dato $x \in A$ sia $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ una base positivamente orientata di $T_x X$ tale che $v_1 \in T_x A$. Allora diremo che v_1 definisce un'orientazione positiva per A se e solo se dF_x manda $\{v_2, \dots, v_{n+1}\}$ in una base positivamente orientata di $T_y N$. Ora sia $w(x)$ il vettore unitario orientato positivamente in $x \in A$. Allora $w(x)$ è differenziabile e quindi punterà esternamente in un punto di ∂A, diciamo in a e, di conseguenza, internamente nell'altro punto b di ∂A. Allora, per definizione, dF_a manda $\{v_2, \dots, v_{n+1}\}$ in una base positivamente orientata di $T_y N$, mentre dF_b manda $\{v_2, \dots, v_{n+1}\}$ in una base negativamente orientata di $T_y N$. Ma, per $2 \leq j \leq n+1$, si ha $dF_x(v_j) = df_x(v_j)$, quindi df_a preserva l'orientazione, mentre df_b la cambia. Allora $\text{segno}(df_a) = 1$ e $\text{segno}(df_b) = -1$, $(*)$ è dimostrata e la dimostrazione del lemma nel Caso 1 è conclusa.

Nel Caso 2 sia V un intorno di y in N nel quale $\deg(f, y)$ è costante (tale intorno esiste per l'Esercizio 3.12(a)). Per il Teorema di Brown (Teorema 2.5), c'è un valore regolare z di F in V e quindi, per il Caso 1, $\deg(f, y) = \deg(f, z) = 0$. ∎

Lemma 3.14. *Siano $f : M \to N$ e $g : M \to N$ due applicazioni differenziabili tra due varietà differenziabili orientate della stessa dimensione con M compatta ed N connessa. Se f e g sono differenziabilmente omotope ed $y \in N$ è un valore regolare di f e g, allora $\deg(f, y) = \deg(g, y)$.*

Dim. Sia $F : M \times I \to N$ un'omotopia differenziabile tra f e g. La varietà $M \times I$ può essere orientata in modo che il suo bordo $M \times \{1\}$ è orientato positivamente, mentre $M \times \{0\}$ è orientato negativamente. Per il Lemma 3.13 si ha

$$0 = \deg F_{|\partial(M \times I)} = \deg(g, y) - \deg(f, y). \quad ∎$$

TEOREMA 3.15. *Sia $f : M \to N$ un'applicazione differenziabile tra due varietà differenziabili orientate della stessa dimensione con M compatta ed N connessa. Siano $y, z \in N$ due valori regolari di f. Allora* $\deg(f, y) = \deg(f, z)$.

Dim. Per il Lemma di omogeneità (Lemma 3.5 - che si applica in questo caso, dato che possiamo considerare N con bordo $\partial N = \emptyset$) esiste un diffeomorfismo $h : N \to N$ tale che $h(y) = z$ e $h \simeq_{isot} \mathrm{Id}_N$. Allora z è un valore regolare di $h \circ f$ e $h \circ f \simeq_{diff} f$. Il Lemma 3.14 mostra allora che $\deg(h \circ f, z) = \deg(f, z)$. Ora facciamo vedere che h preserva l'orientazione. Sia $F : N \times I \to N$ un'isotopia differenziabile tra h e Id_N. Allora $F_t : N \to N$ definita da $F_t(x) = F(x, t)$ è un diffeomorfismo per ogni $t \in I$ e quindi $d(F_t)_x : T_xN \to T_xN$ è un isomorfismo per ogni $t \in I$ e per ogni $x \in N$. Ma allora, fissati $x \in N$ e fissata una base orientata positivamente di T_xN, si ha che la funzione $\phi : I \to N$ definita da $\phi(t) = \det(d(F_t)_x)$ è continua. Dato che $\phi(1) = \det(d(F_1)_x) = \det(\mathrm{Id}_{T_xN}) = 1 > 0$, non può essere $\phi(0) \leq 0$, altrimenti ci sarebbe un $t_0 \in I$ tale che $\phi(t_0) = 0$, cioè $\det(d(F_{t_0})_x) = 0$, contraddicendo il fatto che $d(F_{t_0})_x$ è un isomorfismo. Allora $\det(dh_x) = \det(d(F_0)_x) = \phi(0) > 0$, cioè h preserva l'orientazione. Ne segue che $h \circ f$ preserva l'orientazione se e solo se f la preserva, quindi $\deg(h \circ f, z) = \deg(f, y)$. ■

DEFINIZIONE 3.16. *Sia $f : M \to N$ un'applicazione differenziabile tra due varietà differenziabili orientate della stessa dimensione con M compatta ed N connessa. Il* **grado di Brouwer di** *f è $\deg f = \deg(f, y)$, dove $y \in N$ è un qualsiasi valore regolare di f.*

Il Teorema 3.15 mostra che la definizione di grado di Brouwer di f è ben posta. Il Corollario seguente mostra che la stessa dipende solo dalla classe di omotopia differenziabile di f.

COROLLARIO 3.17. *Siano $f : M \to N$ e $g : M \to N$ due applicazioni differenziabili tra due varietà differenziabili orientate della stessa dimensione con M compatta ed N connessa. Se f e g sono differenziabilmente omotope, allora* $\deg f = \deg g$.

Dim. Come alla fine della dimostrazione del Teorema 3.7 possiamo trovare un punto y in N che è un valore regolare di f e di g. Ora basta applicare il Lemma 3.14. ■

4. Campi differenziabili di vettori tangenti

DEFINIZIONE 4.1. *Sia $M \subseteq \mathbb{R}^k$ una varietà differenziabile (con bordo). Un* **campo differenziabile di vettori tangenti ad** *M è un'applicazione differenziabile $v : M \to \mathbb{R}^k$ tale che $v(x) \in T_xM$ per ogni $x \in M$. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto non vuoto e sia $v : U \to \mathbb{R}^m$ un campo differenziabile di vettori tangenti ad U. Un punto $z \in U$ si dice uno* **zero isolato di** *v se esiste un intorno V di z in U tale che $v(z) = 0$ e $v(z') \neq 0$ per ogni $z' \in V - \{z\}$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che, denotando con $D_\varepsilon(z)$ il disco di centro z e raggio ε, si ha $D_\varepsilon(z) \subseteq V$ e sia $S_\varepsilon(z) = \partial D_\varepsilon(z)$ orientata compatibilmente con $D_\varepsilon(z)$ (nel senso dell'Osservazione 3.10(c)). Sia $\overline{v} : S_\varepsilon(z) \to S^{m-1}$ definito da $\overline{v}(x) = \frac{v(x)}{||v(x)||}$. L'***indice di** *$v$* **in** *$z$, denotato con $\iota_v(z)$, è $\deg \overline{v}$.*

Vedremo che tale definizione non dipende dalla scelta di ε e, più in generale, non dipende da diffeomorfismi di U.

DEFINIZIONE 4.2. *Siano $M \subseteq \mathbb{R}^k, N \subseteq \mathbb{R}^l$ due varietà differenziabili (con bordo) e siano $f : M \to N$ un'applicazione differenzibile e $v : M \to \mathbb{R}^k, w : N \to \mathbb{R}^l$ due campi differenziabili* *di vettori tangenti ad M ed N rispettivamente. Diremo che w* **corrisponde a** *v* **tramite** *f se $df_x(v(x)) = w(f(x))$ per ogni $x \in M$. Se f è un diffeomorfismo, un campo differenziabile di vettori tangenti ad N corrispondente a v tramite f verrà denotato con $df \circ v \circ f^{-1}$.*

Iniziamo con il premettere il

LEMMA 4.3. *Sia $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ un diffeomorfismo che preserva l'orientazione. Allora f è differenzibilmente isotopa a $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}$.*

Dim. Senza perdita di generalità possiamo assumere $f(O) = O$, dove $O = (0, \dots, 0)$. Sia $F : \mathbb{R}^m \times I \to \mathbb{R}^m$ definita da

$$F(x,t) = \begin{cases} \frac{f(tx)}{t} & \text{se } \; 0 < t \leq 1 \\ df_O(x) & \text{se } \; t = 0 \end{cases} .$$

Mostriamo che F è un'omotopia differenziabile tra f e df_O. Ora F è continua per definizione di differenziale, ma facciamo vedere che F è anche differenzibile. Osserviamo prima che esistono funzioni differenzibili $g_1(x), \dots, g_m(x)$ tali che $f(x) = x_1 g_1(x) + \dots + x_m g_m(x)$: infatti si ha

$$f(x) = \int_0^1 \frac{df(tx)}{dt} dt = \sum_{i=1}^m x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$$

e basta porre $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt$. La differenzibilità di F seguirà certamente se mostriamo che

$$(*) \quad F(x,t) = x_1 g_1(tx) + \dots + x_m g_m(tx).$$

Ora, se $0 < t \leq 1$, si ha

$$F(x,t) = \frac{f(tx)}{t} = \frac{tx_1 g_1(tx) + \dots + tx_m g_m(tx)}{t} = x_1 g_1(tx) + \dots + x_m g_m(tx),$$

mentre se $t = 0$ si ha

$$F(x,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tx)}{t} = \lim_{t \to 0} (x_1 g_1(tx) + \dots + x_m g_m(tx)) = x_1 g_1(0) + \dots + x_m g_m(0)$$

e $(*)$ è dimostrata. Allora $f \simeq_{diff} df_O$ e resta da vedere che $df_O \simeq_{diff} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}$. Ora df_O è rappresentata da una matrice A di determinante positivo e possiamo scegliere un'applicazione differenziabile $\gamma : I \to GL(m, \mathbb{R})^+ = \{B \in GL(m, \mathbb{R}) : \det B > 0\}$ tale che $\gamma(0) = A$ e $\gamma(1) = I_m$ (si veda per esempio [**L**, Prop.9.36]). Allora ponendo $G(x,t) = \gamma(t)x$ si ha un'isotopia differenziabile tra df_O e $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}$. ∎

LEMMA 4.4. *Siano $U \subseteq \mathbb{R}^m, U' \subseteq \mathbb{R}^m$ due aperti non vuoti e siano $f : U \to U'$ un diffeomorfismo, $v : U \to \mathbb{R}^m$ un campo differenziabile di vettori tangenti ad U e sia $w = df \circ v \circ f^{-1}$. Se $z \in U$ è uno zero isolato di v si ha*

$$\iota_v(z) = \iota_w(f(z)).$$

Dim. Senza perdita di generalità possiamo assumere $z = f(z) = O = (0, \dots, 0)$ e U convesso. Se f preserva l'orientamento, come nel Lemma 4.3, per ogni $t \in I$ possiamo costruire diffeomorfismi $F_t : U \to F_t(U)$ tale che $F_0 = \mathrm{Id}_U, F_1 = f$ e $F_t(O) = O$. Ora se $v_t = dF_t \circ v \circ F_t^{-1}$, allora tutti i v_t sono definiti e non nulli su una sfera $S_\varepsilon(O)$ di raggio ε sufficentemente piccolo. Ma allora l'indice di $v = v_O$ in O è lo stesso di quello di $w = v_1$ in O. Invece se f cambia l'orientamento è sufficente scegliere una riflessione ρ e considerare il campo $v' = \rho \circ v \circ \rho^{-1}$.

Infatti ora $\rho \circ f$ preserva l'orientazione e se $\overline{v'}(x) = \frac{v'(x)}{||v'(x)||}, x \in S_\varepsilon(O)$, allora $\overline{v'} = \rho \circ \overline{v} \circ \rho^{-1}$ ed un calcolo diretto mostra che $\deg \overline{v'} = \deg \overline{v}$. ■

Il lemma permette di dare la seguente

Definizione 4.5. *Sia $M \subseteq \mathbb{R}^k$ una varietà differenziabile (con bordo) e sia $v : M \to \mathbb{R}^k$ un campo differenziabile di vettori tangenti ad M. Sia $z \in M$ uno zero isolato di v e sia $g : U \to M$ una parametrizzazione di M in z. L'***indice di** v **in** z*, denotato con $\iota_v(z)$, è l'indice di $dg^{-1} \circ v \circ g$ in $g^{-1}(z)$.*

Richiamiamo ora un fatto generale di teoria di gruppi (si veda per esempio [**Ma**, Teor.4.73]): sia G un gruppo abeliano finitamente generato. Allora $G \cong T \oplus \mathbb{Z}^r$ dove T è il sottogruppo di torsione di G e $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. L'intero r è univocamente associato a G e si dice il **rango di** G.

Prima di enunciare il risultato principale di questa parte della topologia differenziale, osserviamo che se M è una varietà differenziabile compatta (con bordo) allora i suoi gruppi di omologia sono gruppi abeliani finitamente generati ([**H**, Cor.A.9 e A.8]). Allora possiamo introdurre la

Definizione 4.6. *Sia M una varietà differenziabile compatta (con bordo) di dimensione m. La* **caratteristica di Eulero-Poincaré di** *M, denotata con $\chi(M)$, è $\sum_{p=0}^{m}$ rango$(H_p(M))$.*

Teorema 4.7 (Teorema di Poincaré-Hopf). *Sia $M \subseteq \mathbb{R}^k$ una varietà differenziabile compatta (con bordo) di dimensione m e sia $v : M \to \mathbb{R}^k$ un campo differenziabile di vettori tangenti ad M con zeri isolati. Se M ha bordo supponiamo che v punta esternamente in ogni punto del bordo. Allora*

$$\sum_{z \text{ zero isolato di } v} \iota_v(z) = \chi(M).$$

Questo teorema mostra che la somma degli indici di un campo vettoriale dipende solo dalla topologia di M. Una sua dimostrazione è però oltre gli scopi di questo corso (si veda per esempio [**GP**, pag.134]).

Bibliografia

[B] W. M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry.* Pure and Applied Mathematics, 63. Academic Press, New York-London, 1975.

[GP] V. Guillemin, A. Pollack. *Differential topology.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.

[K] C. Kosniowski. *Introduzione alla topologia algebrica.* Zanichelli, 1993.

[J] R. Johnsonbaugh. *Discrete Mathematics.* Prentice Hall, 2008.

[L] J. M. Lee. *Introduction to topological manifolds.* Graduate Texts in Mathematics 202, Springer, 2000.

[H] A. Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, 2001.

[Ma] A. Machì. *Introduzione alla teoria dei gruppi.* Feltrinelli, 1974.

[Mi1] J. W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint.* Princeton University Press, 1990.

[Mi2] J. W. Milnor. *Morse theory.* Annals of Mathematics Studies 51, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1963.

[S] E. Sernesi. *Geometria 2.* Bollati Boringhieri, 1996.

[T] R. Thom. *Quelques propriétés globales des variétés différentiables.* Comment. Math. Helv. 28, (1954) 17–86.