UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2011-2012

Prova scritta del 12-6-2012

TESTO E SOLUZIONI

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X + kY + Z = -2 \\ kX - kY + Z = 0 \\ -2X + Y - Z = 0 \\ X + 3Y + Z = 0. \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti per poi applicare il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & -k & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, dunque, per il principio dei minori orlati, per calcolare il rango di A occorre studiare

$$\begin{vmatrix} k & -k & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3k - 7 = 0 \text{ se e solo se } k = \frac{7}{3}$$

e

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = k - 3 = 0 \text{ se e solo se } k = 3.$$

Dunque $r(A) = 3$. Ora, per la matrice orlata (Ab) si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 1 & -2 \\ k & -k & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2(3k - 7).$$

Deduciamo che, se $k \neq \frac{7}{3}$, allora $r(A) = 3 \neq r(Ab) = 4$ ed il sistema non è compatible. Mentre, se $k = \frac{7}{3}$, allora $r(A) = 3 = r(Ab)$ ed il sistema è compatible. In tal caso ne possiamo calcolare le soluzioni con la regola di Cramer:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} -2 & \frac{7}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{7}{3} & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = 12, Y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{7}{3} & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = 3, Z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{7}{3} & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{7}{3} & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = -21. \blacksquare$$

2. Sia h un numero reale. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \\ X_2 - X_4 = 0 \end{cases}$$

e

$$W_h = < (1,0,1,0), (-1,1,0,-1), (h,-1,2,1) > .$$

(a) Determinare le dimensioni di U, W_h e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.
(b) Determinare le dimensioni di $W_h + U$ e di $W_h \cap U$;
(c) Determinare se esiste un sottospazio $V \neq \{0\}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$(W_h + U) \oplus V = \mathbb{R}^4.$$

SOLUZIONE:

(a) Un vettore di U soddisfa $X_1 = -X_2, X_4 = X_2$, dunque è del tipo $(-X_2, X_2, X_3, X_2) = X_2(-1,1,0,1) + X_3(0,0,1,0)$. Pertanto U ha dimensione 2 con base $\{(-1,1,0,1),(0,0,1,0)\}$. Per W_h si verifica facilmente che il rango di

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ h & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

è 2 se $h = 3$ ed è 3 se $h \neq 3$. Pertanto, se $h = 3$, $\dim W_3 = 2$ e $\{(1,0,1,0),(-1,1,0,-1)\}$ ne è una base; mentre se $h \neq 3$, $\dim W_h = 3$ e $\{(1,0,1,0),(-1,1,0,-1),(h,-1,2,1)\}$ ne è una base.

(b) Per $W_h + U$ osserviamo che

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

pertanto $\dim(W_h+U)=4$. Per la formula di Grassmann si ha $\dim(W_h\cap U)=0$ se $h=3$, $\dim(W_h\cap U)=1$ se $h\neq 3$.
(c) V non esiste, altrimenti si avrebbe $\dim V\geq 1$ e quindi l'assurdo

$$4=\dim\mathbb{R}^4=\dim(W_h+U)+\dim V\geq 5. \blacksquare$$

3. Sia k un numero reale e si considerino le due matrici

$$A=\begin{pmatrix}1 & -k & k\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i valori di k per i quali A può essere trasformata in B con sole operazioni elementari;
(b) per i valori di k individuati sopra, si determini una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

SOLUZIONE:

(a) Si vede subito che

$$\det(B)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1 \text{ e } \det(A)=\begin{vmatrix}1 & -k & k\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=k+1,$$

dunque $r(B)=3$ e $r(A)=3$ se e solo se $k\neq -1$. Quindi, se A può essere trasformata in B con sole operazioni elementari, si ha $r(A)=r(B)=3$, dunque $k\neq -1$. Viceversa, se $k\neq -1$, si ha $r(A)=r(B)=3$, dunque A può essere trasformata in I_3 con sole operazioni elementari e così B. Invertendo tali operazioni elementari, si trasforma I_3 in B. Pertanto A può essere trasformata in B con sole operazioni elementari se e solo se $k\neq -1$.
(b) Sia ora $k\neq -1$. L'operazione $R_3\to R_3+R_1$ applicata ad A da la matrice

$$\begin{pmatrix}1 & -k & k\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1-k & 1+k\end{pmatrix}$$

e le operazioni $R_1\to R_1+kR_2, R_3\to R_3+(k-1)R_2$ danno la matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & k\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1+k\end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_3 \to \frac{1}{k+1} R_3$ da la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_1 \to R_1 - kR_3$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, con l'operazione $R_1 \to R_1 + R_2$, si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_2 \to -R_2$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e le operazioni $R_2 \to R_2 + 2R_1, R_1 \to R_1 + R_3$ danno la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B. \blacksquare$$

4. Siano $k \in \mathbb{R}, v_1 = (1,0,1), v_2 = (1,-1,-1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che

$$F(E_1) = v_1 + v_2, F(E_2) = 3v_1 - 4E_3, F(E_3) = kE_2 + 2E_3,$$

dove $\{E_1, E_2, E_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.
(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F. Inoltre, individuato, per un opportuno k, un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.
(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che $v_1+v_2 = 2E_1-E_2, 3v_1-4E_3 = 3E_1-E_3$, pertanto, nella base canonica $e = \{E_1, E_2, E_3\}$ la matrice di F è

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & k \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ed il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 3 & 0 \\ -1 & -T & k \\ 0 & -1 & 2-T \end{vmatrix} = (2-T)(T^2-2T+k+3)$$

e gli autovalori di F sono ottenuti risolvendo $(2-T)(T^2-2T+k+3) = 0$. Dunque, se $k > -2$, $\lambda_1 = 2$, mentre se $k \leq -2$, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda = 1 \pm \sqrt{-2-k}$. Notiamo che, se $k \leq -2$, si ha $1 \pm \sqrt{-2-k} = 2$ se e solo se si sceglie il segno $+$ e $k = -3$. Ne segue che gli autovalori di F sono

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k > -2$	$\lambda_1 = 2$ (m.a. 1)
$k = -2$	$\lambda_1 = 2$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1$ (m.a. 2)
$k = -3$	$\lambda_1 = 2$ (m.a. 2), $\lambda_2 = 0$ (m.a. 1)
$k < -2, k \neq -3$	$\lambda_1 = 2$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1 - \sqrt{-2-k}$ (m.a. 1), $\lambda_3 = 1 + \sqrt{-2-k}$ (m.a. 1)

(b) Dato che la molteplicità geometrica è sempre almeno 1 e non può superare la molteplicità algebrica, ne segue che le dimensioni degli autospazi di F saranno 1 in tutti i casi nella tabella sopra nei quali la molteplicità algebrica è 1. Vediamo i casi restanti.
Se $k = -2$, posto $T = 1$ nella matrice $M_e(F) - TI_3$ si ottiene

$$r(M_e(F) - I_3) = r \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

da cui $\dim V_1(F) = 3 - 2 = 1$.
Se $k = -3$, abbiamo che $\lambda_1 = 2$ è l'autovalore da considerare nel punto (b), pertanto calcoliamo direttamente la base di $V_2(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore 2 sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - 2I_3)X = 0$ dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Si ottiene

$$\begin{cases} 3y = 0 \\ -x - 2y - 3z = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $y = 0, x = -3z$, da cui gli autovettori di F associati all'autovalore 2 sono tutti del tipo $-3zE_1 + zE_3 = z(-3E_1 + E_3)$. Ne segue che una base di $V_2(F)$ è $\{-3E_1 + E_3\}$ e $\dim V_2(F) = 1$.

(c) Per la diagonalizzabilità di F abbiamo i seguenti casi:

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

1) $k > -2$

autovalore	m.g.	m.a.
2	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è $1 < 3$ e quindi F non è diagonalizzabile.

2) $k = -2$

autovalore	m.g.	m.a.
2	1	1
1	1	2

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è $2 < 3$ e quindi F non è diagonalizzabile.

3) $k = -3$

autovalore	m.g.	m.a.
2	1	2
0	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è $2 < 3$ e quindi F non è diagonalizzabile.

4) $k < -2, k \neq -3$

autovalore	m.g.	m.a.
2	1	1
$1 - \sqrt{-2-k}$	1	1
$1 + \sqrt{-2-k}$	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 3 e quindi F è diagonalizzabile.

Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $k < -2, k \neq -3$. ■

5. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ siano s ed r_k le due rette con le seguenti equazioni:

$$s : \begin{cases} X - Y + Z = 2 \\ X + Y - 3Z = 0 \end{cases}, r_k : \begin{cases} X = u - 1 \\ Y = k \\ Z = 2u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare se esiste un k tale che s e r_k sono parallele.

(b) Determinare per quali k si ha che s e r_k sono complanari.

(c) Sia k tale che s e r_k sono incidenti. Scrivere le equazioni di tutte le rette t in $\mathbb{A}^3$ tali che t ed s sono complanari, t ed r_k sono complanari, ma t, s ed r_k non sono contenute in un piano.

SOLUZIONE:

(a) La giacitura di r_k è data dai coefficienti di u ed è quindi $< (1, 0, 2) >$, mentre quella di s è data dai minori 2×2, a segni alterni di

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

ed è pertanto $< (2, 4, 2 >$. Dato che $r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2$, ne segue che s ed r_k non sono parallele per nessun k.

(b) Scriviamo le equazioni Cartesiane di r_k: si ha $Y = k$ e $X + 1 = u = \frac{Z}{2}$ e quindi r_k ha equazioni $\begin{cases} Y - k = 0 \\ 2X - Z + 2 = 0 \end{cases}$. Come è noto, s e r_k sono complanari se e solo se

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -k \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2k + 18$$

dunque se e solo se $k = -9$.

(c) Per il punto (b), affinchè s e r_k siano incidenti, devono essere complanari, pertanto $k = -9$. Del resto, per $k = -9$, s e r_{-9} sono complanari e non parallele, dunque incidenti. Consideriamo una retta t come in (c). Se t è parallela ad s (o a r_{-9}) ne segue che, dovendo essere incidente r_{-9} (o s), t è contenuta nel piano π contenente s e r_{-9}, caso escluso. Pertanto t deve essere incidente sia s che r_{-9}, ma deve necessariamente intersecarle nel loro punto comune P, altrimenti, di nuovo, t sarebbe contenuta in π, caso escluso. In conclusione t è una qualsiasi retta passante per P non contenuta in π. Si vede facilmente che $P = (-3, -9, -4)$ e che t non è contenuta in π se e solo se non è parallela a π. Sia $< (a, b, c) >$ la giacitura di t. Allora t non è parallela a π se e solo se

$$0 \neq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -8a + 2b + 4c.$$

Dunque

$$t: \begin{cases} X = au - 3 \\ Y = bu - 9 \quad u \in \mathbb{R} \\ Z = cu - 4 \end{cases}$$

con $-4a + b + 2c \neq 0$.

6. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia M_2 lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficenti reali e sia $B_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Sia $F : M_2 \to M_2$ l'applicazione definita da

$$F(A) = B_k A.$$

(a) Dimostrare che F è lineare.

(b) Determinare una matrice di F.

(c) Determinare le dimensioni di $N(F)$ ed $\mathrm{Im}(F)$.

SOLUZIONE:

(a) Date $A, A' \in M_2$, $c, c' \in \mathbb{R}$ si ha

$$F(cA + c'A') = B_k(cA + c'A') = cB_kA + c'B_kA' = cF(A) + c'F(A')$$

ed è dunque lineare.

(b) Consideriamo la base

$$e = \{E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

di M_2. Si ha

$$F(E_{11}) = B_kE_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11}, F(E_{12}) = B_kE_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{12},$$

$$F(E_{21}) = B_kE_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} = -E_{11} + kE_{21}, F(E_{22}) = B_kE_{22} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & k \end{pmatrix} = -E_{12} + kE_{22}.$$

Ne segue che

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

(c) Si vede facilmente che $\dim \mathrm{Im}(F) = r(M_e(F)) = \begin{cases} 4 & \text{se } k \neq 0 \\ 2 & \text{se } k = 0 \end{cases}$, pertanto, per il teorema rango-nullità, $\dim N(F) = \dim M_2 - \dim \mathrm{Im}(F) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq 0 \\ 2 & \text{se } k = 0 \end{cases}$.