UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2011-2012

Prova scritta del 12-6-2012

A. Per il primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3;

B. Per il secondo esonero svolgere gli esercizi 4,5,6;

C. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5;

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X + kY + Z = -2 \\ kX - kY + Z = 0 \\ -2X + Y - Z = 0 \\ X + 3Y + Z = 0. \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Sia h un numero reale. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \\ X_2 - X_4 = 0 \end{cases}$$

e

$$W_h = < (1,0,1,0), (-1,1,0,-1), (h,-1,2,1) > .$$

(a) Determinare le dimensioni di U, W_h e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.

(b) Determinare le dimensioni di $W_h + U$ e di $W_h \cap U$;

(c) Determinare se esiste un sottospazio $V \neq \{0\}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$(W_h + U) \oplus V = \mathbb{R}^4.$$

3. Sia k un numero reale e si considerino le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i valori di k per i quali A può essere trasformata in B con sole operazioni elementari;

(b) per i valori di k individuati sopra, si determini una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

4. Siano $k \in \mathbb{R}, v_1 = (1,0,1), v_2 = (1,-1,-1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che

$$F(E_1) = v_1 + v_2, F(E_2) = 3v_1 - 4E_3, F(E_3) = kE_2 + 2E_3,$$

dove $\{E_1, E_2, E_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F. Inoltre, individuato, per un opportuno k, un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

5. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ siano s ed r_k le due rette con le seguenti equazioni:

$$s : \begin{cases} X - Y + Z = 2 \\ X + Y - 3Z = 0 \end{cases}, r_k : \begin{cases} X = u - 1 \\ Y = k \\ Z = 2u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare se esiste un k tale che s e r_k sono parallele.

(b) Determinare per quali k si ha che s e r_k sono complanari.

(c) Sia k tale che s e r_k sono incidenti. Scrivere le equazioni di tutte le rette t in $\mathbb{A}^3$ tali che t ed s sono complanari, t ed r_k sono complanari, ma t, s ed r_k non sono contenute in un piano.

6. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia M_2 lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficenti reali e sia $B_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Sia $F : M_2 \to M_2$ l'applicazione definita da

$$F(A) = B_k A.$$

(a) Dimostrare che F è lineare.

(b) Determinare una matrice di F.

(c) Determinare le dimensioni di $N(F)$ ed $\mathrm{Im}(F)$.