UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2011-2012

Prova scritta del 12-7-2012

TESTO E SOLUZIONI

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 + X_2 + X_3 = -1 \\ X_1 - X_2 + X_4 = -1 \\ -X_1 + 3X_3 + X_4 = 0 \\ (k+1)X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 3X_4 = 0. \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti per poi applicare il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli. Sia

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ k+1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$, dunque $r(A) \geq 3$. Inoltre

$$\det(A) = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ k+1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -9k - 6 = 0 \text{ se e solo se } k = -\frac{2}{3}$$

pertanto $r(A) = \begin{cases} 3 & \text{if } k = -\frac{2}{3} \\ 4 & \text{if } k \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$. Nella matrice orlata

$$(Ab) = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ k+1 & 2 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

c'è il minore

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

Dunque $r(Ab) = 4$ ed il sistema è compatibile se e solo se $k \neq -\frac{2}{3}$.
Se $k \neq -\frac{2}{3}$ possiamo calcolare le soluzioni con la regola di Cramer:

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{-9k-6} = -\frac{6}{3k+2}, \quad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} k & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ k+1 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{-9k-6} = 1,$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ k+1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-9k-6} = -\frac{4}{3k+2}, X_4 = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ k+1 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{-9k-6} = \frac{6}{3k+2}. \blacksquare$$

2. Sia a un numero reale. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e siano $v_1 = e_1 - ae_2 + e_3, v_2 = e_1 + e_2 + e_3, v_3 = (a-1)e_2 - 2e_3 + e_4, v_4 = e_2 - e_3$.
(a) Sia $U = < v_1, v_2, v_3, v_4 >$ il sottospazio generato da essi. Calcolare la dimensione di U.
(b) Determinare un sottospazio W di V tale che

$$U \oplus W = V.$$

(c) Siano $u = e_1 - e_2, v = e_1 + e_3$. Determinare (se esistono) i valori di a per i quali $\dim(U \cap < u, v >) = 2$.

SOLUZIONE:

(a) La dimensione di U è il rango di

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ora

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = a + 1 = 0$$

se e solo se $a = -1$. Se $a = -1$ si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Pertanto $\dim U = \begin{cases} 4 & \text{if } a \neq -1 \\ 3 & \text{if } a = -1 \end{cases}$.

(b) Se $a \neq -1$ prendiamo $W = \{0\}$. Se $a = -1$ mostriamo che possiamo scegliere $W =< e_4 >$. Infatti

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

pertanto $\dim(U+W) = 4$. Ne segue che $U+W = V$. Inoltre, per la formula di Grassmann, si ha $\dim(U \cap W) = 3 + 1 - 4 = 0$ e quindi

$$U \oplus W = V.$$

(c) Dato che, ovviamente $\dim < u, v >= 2$ e $U\cap < u, v >\subseteq< u, v >$ si ha $\dim(U\cap < u, v >) = 2$. se e solo se $U\cap < u, v >=< u, v >$. Ciò è sicuramente vero se $a \neq -1$ in quanto, in tal caso, $U = V$. Invece se $a = -1$ osserviamo che $u \notin U$ poichè

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Pertanto $\dim(U\cap < u, v >) = 2$ se e solo se $a \neq -1$. ∎

3. Sia a un numero reale e sia

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare i valori di a per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, calcolare, con sole operazioni elementari, l'inversa.

SOLUZIONE:

Si vede subito che

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(a-1)$$

pertanto A è invertibile se e solo se $a \neq 1$.

Supposto $a \neq 1$ facciamo operazioni elementari sulla matrice

$$(AI_3) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_2 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e le operazioni $R_2 \to R_2 - aR_1, R_4 \to R_4 - R_1$ danno la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & -a & 1-a & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_2 con R_3 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & -a & 1-a & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_3 con R_4 si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-a & -a & 1-a & 1 & -a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, con le operazioni $R_4 \to \frac{1}{1-a}R_4, R_3 \to -\frac{1}{2}R_3$, si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{a}{1-a} & 1 & \frac{1}{1-a} & -\frac{a}{1-a} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \to R_4 + \frac{a}{1-a}R_3$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{1-a} & -\frac{a}{2(1-a)} & 0 & -\frac{a}{2(1-a)} \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_4 \to R_4 - R_2$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{1-a} & -\frac{a}{2(1-a)} & -1 & -\frac{a}{2(1-a)} \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_4 \to -R_4$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{1-a} & \frac{a}{2(1-a)} & 1 & \frac{a}{2(1-a)} \end{pmatrix}.$$

Con le operazioni $R_1 \to R_1 - R_4, R_2 \to R_2 - 2R_4$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{1-a} & \frac{2-3a}{2(1-a)} & -1 & -\frac{a}{2(1-a)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{1-a} & -\frac{a}{1-a} & -1 & -\frac{a}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{1-a} & \frac{a}{2(1-a)} & 1 & \frac{a}{2(1-a)} \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_1 \to R_1 - R_3$ da la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-a} & \frac{1-2a}{2(1-a)} & -1 & \frac{1-2a}{2(1-a)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{1-a} & -\frac{a}{1-a} & -1 & -\frac{a}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{1-a} & \frac{a}{2(1-a)} & 1 & \frac{a}{2(1-a)} \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_1 \to R_1 - R_2$ da la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{1-a} & \frac{1}{2(1-a)} & 0 & \frac{1}{2(1-a)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{1-a} & -\frac{a}{1-a} & -1 & -\frac{a}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{1-a} & \frac{a}{2(1-a)} & 1 & \frac{a}{2(1-a)} \end{pmatrix}.$$

Si deduce infine che

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1-a} & \frac{1}{2(1-a)} & 0 & \frac{1}{2(1-a)} \\ \frac{2}{1-a} & -\frac{a}{1-a} & -1 & -\frac{a}{1-a} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \\ -\frac{1}{1-a} & \frac{a}{2(1-a)} & 1 & \frac{a}{2(1-a)} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

4. Siano $v = (0,3,1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che v è un autovettore di F e $E_1 + 2E_2 \in N(F), F(E_2) = F(v) + E_1 + E_2$, dove E_1, E_2, E_3 è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) Scelto un opportuno parametro, determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.
(b) Trovare una base per ciascun autospazio di F.
(c) Determinare quando F è (o no) diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che $e = \{E_1, E_2, v\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Sia $k \in \mathbb{R}$ tale che $F(v) = kv$. Quindi $F(E_2) = E_1 + E_2 + kv$. Inoltre $F(E_1 + 2E_2) = 0$, dunque $F(E_1) = -2F(E_2) = -2E_1 - 2E_2 - 2kv$. Allora la matrice di F nella base e è

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2k & k & k \end{pmatrix}$$

ed il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} -2-T & 1 & 0 \\ -2 & 1-T & 0 \\ -2k & k & k-T \end{vmatrix} = (k-T)T(T+1)$$

e gli autovalori di F sono $\lambda_1 = k, \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = -1$. Dunque

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k = -1$	$\lambda_1 = -1$ (m.a. 2), $\lambda_2 = 0$ (m.a. 1)
$k = 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2), $\lambda_2 = -1$ (m.a. 1)
$k \neq -1, 0$	$\lambda_1 = k$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_3 = -1$ (m.a. 1)

(b) Calcoliamo le basi degli autospazi. Gli autovettori di F con autovalore 0 sono i vettori $xE_1 + yE_2 + zv$ tali che $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è soluzione del sistema $(M_e(F) - 0I_3)X = 0$. Si ottiene

$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ -2x + y = 0 \\ k(-2x + y + z) = 0 \end{cases}.$$

Se $k \neq 0$ le soluzioni sono $y = 2x, z = 0$, da cui gli autovettori di F associati all'autovalore 0 sono tutti del tipo $xE_1 + 2xE_2 = x(E_1 + 2E_2)$. Ne segue che una base di $V_0(F)$ è $\{E_1 + 2E_2\}$ e $\dim V_0(F) = 1$.

Se $k=0$ le soluzioni sono $y=2x$, da cui gli autovettori di F associati all'autovalore 0 sono tutti del tipo $xE_1+2xE_2+zv=x(E_1+2E_2)+zv$. Ne segue che una base di $V_0(F)$ è $\{E_1+2E_2,v\}$ e $\dim V_0(F)=2$.

Gli autovettori di F con autovalore -1 sono i vettori xE_1+yE_2+zv tali che $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ è soluzione del sistema $(M_e(F)+I_3)X=0$. Si ottiene

$$\begin{cases}-x+y=0\\-2x+2y=0\\-2kx+ky+(k+1)z=0\end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases}-x+y=0\\-kx+(k+1)z=0\end{cases}.$$

Se $k\neq-1$ le soluzioni sono $y=x, z=\frac{k}{k+1}x$, da cui gli autovettori di F associati all'autovalore -1 sono tutti del tipo $xE_1+xE_2+\frac{k}{k+1}xv=x(E_1+E_2+\frac{k}{k+1}v)$. Ne segue che una base di $V_{-1}(F)$ è $\{E_1+E_2+\frac{k}{k+1}v\}$ e $\dim V_{-1}(F)=1$.
Se $k=-1$ le soluzioni sono $x=y=0$, da cui gli autovettori di F associati all'autovalore -1 sono tutti del tipo zv. Ne segue che una base di $V_{-1}(F)$ è $\{v\}$ e $\dim V_{-1}(F)=1$.

Gli autovettori di F con autovalore k sono i vettori xE_1+yE_2+zv tali che $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ è soluzione del sistema $(M_e(F)-kI_3)X=0$. Si ottiene

$$\begin{cases}(-2-k)x+y=0\\-2x+(1-k)y=0\\-2kx+ky=0\end{cases}.$$

Se $k\neq0$ le soluzioni sono $x=y=0$, da cui gli autovettori di F associati all'autovalore k sono tutti del tipo zv. Ne segue che una base di $V_k(F)$ è $\{v\}$ e $\dim V_k(F)=1$.
Se $k=0$ le soluzioni sono $y=2x$, da cui gli autovettori di F associati all'autovalore k sono tutti del tipo $xE_1+2xE_2+zv=x(E_1+2E_2)+zv$. Ne segue che una base di $V_k(F)$ è $\{E_1+2E_2,v\}$ e $\dim V_k(F)=2$.
(c) Per la diagonalizzabilità di F abbiamo i seguenti casi:

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

1) $k=-1$

autovalore	m.g.	m.a.
-1	1	2
0	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è $2 < 3$ e quindi F non è diagonalizzabile.

3) $k = 0$

autovalore	m.g.	m.a.
0	2	2
-1	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 3 e quindi F è diagonalizzabile.

4) $k \neq 0, -1$

In questo F ha $3 = \dim \mathbb{R}^3$ autovalori distinti e quindi F è diagonalizzabile.
Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $k \neq -1$. ■

5. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia $A = (k, 1, -1)$ e siano p e q i due piani di equazioni:

$$p : X - Y + Z = 0, \quad q : 3X - Y + Z + 2 = 0.$$

(a) Determinare per quali valori di k esiste $P \in p$ tale che la retta $\overline{AP}$ è parallela a q.
(b) Determinare tutte le rette r passanti per A e parallele a p e q.
(c) Determinare tutte le rette r passanti per A e complanari a $p \cap q$.

SOLUZIONE:

(a) Posto $z = v$ e $y = u$, il punto $P \in p$ avrà coordinate $P(u - v, u, v)$, da cui $\overrightarrow{AP} = (k - u + v, 1 - u, -1 - v)$. Dato che la giacitura di q è data dall'equazione omogenea $3X - Y + Z = 0$ si ha che la retta $\overline{AP}$ è parallela a q se e solo se

$$3(k - u + v) - (1 - u) + (-1 - v) = 0,$$

ovvero se e solo se

$$k = \frac{2u - 2v + 2}{3}.$$

Dunque per ogni $k \in \mathbb{R}$, presi, per esempio, $u = \frac{3k}{2}, v = 1$ si ha che il punto $P(\frac{3k}{2} - 1, \frac{3k}{2}, 1)$ è tale che la retta $\overline{AP}$ è parallela a q.

(b) Una retta r è parallela a p e q se e solo se r è parallela a $p \cap q$. Ora la giacitura di $p \cap q$ è data dai minori 2×2, a segni alterni, della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e dunque la giacitura di $p\cap q$ è il sottospazio $<(0,2,2)>=<(0,1,1)>$. Allora r è la retta passante per A con giacitura $<(0,1,1)>$ ed ha dunque equazioni parametriche

$$r:\begin{cases} X=k \\ Y=t+1 \\ Z=t-1 \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

(c) Una retta r passante per A con giacitura $<(l,m,n)>$ ha equazioni parametriche

$$r:\begin{cases} X=lt+k \\ Y=mt+1 \\ Z=nt-1 \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Per verificare che r è complanare a $p\cap q$, scegliamo il punto $A=(k,1,-1)$ su r ed il punto $Q(-1,-1,0)$ su $p\cap q$. Ne segue che r è complanare a $p\cap q$ se e solo se

$$\begin{vmatrix} k+1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

e quindi se e solo se

$$(k+1)(n-m)+3l=0.$$

Se ne deduce che tutte le rette r passanti per A e complanari a $p\cap q$ sono quelle di equazioni parametriche

$$r:\begin{cases} X=\frac{1}{3}(k+1)(m-n)t+k \\ Y=mt+1 \\ Z=nt-1 \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.\ \blacksquare$$

6. Siano U,V,W tre spazi vettoriali reali di dimensione finita e siano $F:V\to W, G:W\to U$ due applicazioni lineari.

(a) Dimostrare che $G\circ F=0$ se e solo se $\mathrm{Im}(F)\subseteq N(G)$.

(b) Dimostrare che $\dim V/N(F)\geq \dim\mathrm{Im}(G\circ F)$.

(c) Sia $w\in W$ tale che $\mathrm{Im}(F)=<w>+N(G)$. Cosa si può dire su $\dim\mathrm{Im}(G\circ F)$?

SOLUZIONE:

(a) $G\circ F=0$ se e solo se $\forall v\in V$ si ha $G(F(v))=0$ se e solo se $\forall v\in V$ si ha $F(v)\in N(G)$ se e solo se $\mathrm{Im}(F)\subseteq N(G)$.

(b) Osserviamo che $N(F)\subseteq N(G\circ F)$: se $F(v)=0$ allora certo $G(F(v))=G(0)=0$. Dunque $\dim N(F)\leq\dim N(G\circ F)$. Per il teorema di rango-nullità si ha

$$\dim V/N(F)=\dim V-\dim N(F)\geq\dim V-\dim N(G\circ F)=\dim\mathrm{Im}(G\circ F).$$

(c) Sia $v\in V$, quindi $F(v)\in\mathrm{Im}(F)$. Per ipotesi esistono $c\in\mathbb{R}$ e $n\in N(G)$ tali che $F(v)=cw+n$. Allora $G(F(v))=cG(w)+G(n)=cG(w)$. Dunque $\mathrm{Im}(G\circ F)\subseteq<G(w)>$ e pertanto $\dim\mathrm{Im}(G\circ F)\leq 1$. $\blacksquare$