UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2011-2012

Prova scritta del 12-7-2012

TESTO

A. Per il primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3;

B. Per il secondo esonero svolgere gli esercizi 4,5,6;

C. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5;

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 + X_2 + X_3 = -1 \\ X_1 - X_2 + X_4 = -1 \\ -X_1 + 3X_3 + X_4 = 0 \\ (k+1)X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 3X_4 = 0. \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Sia a un numero reale. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e siano

$$v_1 = e_1 - ae_2 + e_3, v_2 = e_1 + e_2 + e_3, v_3 = (a-1)e_2 - 2e_3 + e_4, v_4 = e_2 - e_3.$$

(a) Sia $U =< v_1, v_2, v_3, v_4 >$ il sottospazio generato da essi. Calcolare la dimensione di U.

(b) Determinare un sottospazio W di V tale che

$$U \oplus W = V.$$

(c) Siano $u = e_1 - e_2, v = e_1 + e_3$. Determinare (se esistono) i valori di a per i quali $\dim(U\cap < u, v >) = 2$.

3. Sia a un numero reale e sia

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare i valori di a per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, calcolare, con sole operazioni elementari, l'inversa.

4. Siano $v = (0, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che v è un autovettore di F e

$$E_1 + 2E_2 \in N(F), F(E_2) = F(v) + E_1 + E_2,$$

dove $\{E_1, E_2, E_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) Scelto un opportuno parametro, determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare una base per ciascun autospazio di F.

(c) Determinare quando F è (o no) diagonalizzabile.

5. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia $A = (k, 1, -1)$ e siano p e q i due piani di equazioni:

$$p : X - Y + Z = 0, \quad q : 3X - Y + Z + 2 = 0.$$

(a) Determinare per quali valori di k esiste $P \in p$ tale che la retta $\overline{AP}$ è parallela a q.

(b) Determinare tutte le rette r passanti per A e parallele a p e q.

(c) Determinare tutte le rette r passanti per A e complanari a $p \cap q$.

6. Siano U, V, W tre spazi vettoriali reali di dimensione finita e siano $F : V \to W, G : W \to U$ due applicazioni lineari.

(a) Dimostrare che $G \circ F = 0$ se e solo se $\mathrm{Im}(F) \subseteq N(G)$.

(b) Dimostrare che $\dim V/N(F) \geq \dim \mathrm{Im}(G \circ F)$.

(c) Sia $w \in W$ tale che $\mathrm{Im}(F) =< w > +N(G)$. Cosa si può dire su $\dim \mathrm{Im}(G \circ F)$?