UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2011-2012

Prova scritta del 12-9-2012

TESTO E SOLUZIONI

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - kX_2 + X_3 - X_4 = 2 \\ X_1 + X_2 - X_4 = 0 \\ X_1 + kX_3 + X_4 = 1 \\ X_2 - X_3 + 3kX_4 = 0. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan, determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Facciamo operazioni elementari sulla matrice del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3k & 0 \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_2 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -k & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3k & 0 \end{pmatrix}$$

e, con le operazioni $R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - R_1$, si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -k-1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & k & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3k & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_2 con R_3 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k & 2 & 1 \\ 0 & -k-1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3k & 0 \end{pmatrix}$$

e le operazioni $R_3 \to R_3 - (k+1)R_2, R_4 \to R_4 + R_2$ danno la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2-k+1 & -2k-2 & 1-k \\ 0 & 0 & k-1 & 3k+2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo ora $k \neq 1$.
Con l'operazione $R_4 \to \frac{1}{k-1} R_4$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2-k+1 & -2k-2 & 1-k \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3k+2}{k-1} & \frac{1}{k-1} \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_3 con R_4 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3k+2}{k-1} & \frac{1}{k-1} \\ 0 & 0 & -k^2-k+1 & -2k-2 & 1-k \end{pmatrix}$$

e, con l'operazione $R_4 \to R_4 + (k^2+k-1)R_3$, si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3k+2}{k-1} & \frac{1}{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3k^3+3k^2-k}{k-1} & \frac{3k-2}{k-1} \end{pmatrix}.$$

Notiamo ora che se $3k^3 + 3k^2 - k = 0$, cioè se $k = 0, \frac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$, allora $\frac{3k-2}{k-1} \neq 0$ ed il sistema è incompatibile.
Invece se $k \neq 1, 0, \frac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$, allora il sistema è compatibile e se ne calcolano facilmente le soluzioni

$$X_1 = \frac{2(3k^2+1)}{3k^3+3k^2-k},\ X_2 = \frac{-6k^2+3k-4}{3k^3+3k^2-k},\ X_3 = \frac{3k^2-3k-4}{3k^3+3k^2-k},\ X_4 = \frac{3k-2}{3k^3+3k^2-k}.$$

Supponiamo ora $k = 1$. La matrice A è allora

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

il sistema è compatibile e se ne calcolano facilmente le soluzioni (che coincidono con le precedenti per $k = 1$):

$$X_1 = \frac{8}{5},\ X_2 = -\frac{7}{5},\ X_3 = -\frac{4}{5},\ X_4 = \frac{1}{5}. \qquad \blacksquare$$

2. Sia k un numero reale e sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Siano

$$v_1 = e_1 + ke_4, v_2 = e_1 - e_3, v_3 = e_1 + ke_2, v_4 = e_1.$$

(a) Siano $U =< v_1, v_2, v_3 >, W =< v_1, v_3, v_4 >$ i sottospazi generati. Calcolare $\dim U$ e $\dim W$;
(b) determinare tutti i valori di k (se esistono) tali che $U \subseteq W$;
(c) determinare tutti i valori di k (se esistono) tali che $\dim U \cap W = 3$.

SOLUZIONE:

(a) La dimensione di U è

$$\dim U = r(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{cases} 3 & \text{if } k \neq 0 \\ 2 & \text{if } k = 0 \end{cases}$$

e la dimensione di W è

$$\dim W = r(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{cases} 3 & \text{if } k \neq 0 \\ 1 & \text{if } k = 0 \end{cases}.$$

(b) Si ha che $U \subseteq W$ se e solo se $v_2 \in W$. Se $k = 0$ non può accadere che $U \subseteq W$ dato che $\dim U = 2$ e $\dim W = 1$. Se $k \neq 0$, essendo v_1, v_3, v_4 linearmente indipendenti, si ha che $v_2 \in W$ se e solo se $r(v_1, v_2, v_3, v_4) = 3$ cioè se e solo se

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ma

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -k^2 \neq 0$$

Pertanto non esistono valori di k tali che $U \subseteq W$.

(c) Sia k tale che $\dim U \cap W = 3$. Dato che $U \cap W \subseteq U$ si ha $\dim U \geq \dim U \cap W = 3$, quindi $\dim U = 3$ e, analogamente $\dim W = 3$. Ne segue che $U = U \cap W = W$, assurdo per la (b). Pertanto non esistono valori di k tali che $\dim U \cap W = 3$. ∎

3. Sia **A** uno spazio affine di dimensione 3 su uno spazio vettoriale reale V e sia $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ un riferimento affine. Sia $A(-1, 1, 0)$ un punto di **A** e siano p_1 il piano in **A** di equazione cartesiana $X - Y + 2Z = 0$ e p_2 il piano in **A** passante per A e di giacitura $< e_1, e_2 - e_3 >$.
(a) Determinare tutte le rette R tali che R è parallela a p_2 ed interseca p_1 in un punto.
(b) Determinare tutti i piani p tali che p è parallelo a p_1 ed interseca p_2 in una retta.
(c) Determinare tutte le rette R tali che R non è parallela né a p_1 né a p_2.

SOLUZIONE:

(a) L'equazione cartesiana di p_2 è

$$0 = \begin{vmatrix} X+1 & Y-1 & Z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = Y - 1 + Z$$

cioè $Y + Z = 1$. Una retta R è parallela a p_2 se e solo se la sua giacitura $< le_1 + me_2 + ne_3 >$ soddisfa $Y + Z = 0$, da cui $m + n = 0$. Inoltre R interseca p_1 in un punto se e solo se R non è parallela a p_1, dunque se e solo se $l - m + 2n \neq 0$, ovvero $l \neq 3m$.
Dunque se $Q(a, b, c)$ è un punto di **A**, per ogni $a, b, c, l, m \in \mathbb{R}$ tali che $l \neq 3m, (l, m) \neq (0, 0)$, le rette

$$R : \begin{cases} X = lt + a \\ Y = mt + b \\ Z = -mt + c \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

sono tutte le rette parallele a p_2 che intersecano p_1 in un punto.
(b) I piani p paralleli a p_1 hanno equazione cartesiana $X - Y + 2Z = d$, per $d \in \mathbb{R}$. Ora p_1 non è parallelo a p_2 dato che la sua giacitura ha equazioni $X - Y + 2Z = 0$, mentre quella di p_2 ha equazioni $Y + Z = 0$. Pertanto neanche p è parallelo a p_2, da cui p interseca p_2 in una retta. Dunque per ogni $d \in \mathbb{R}$ i piani di equazione $X - Y + 2Z = d$ sono tutti i piani paralleli a p_1 che intersecano p_2 in una retta.
(c) Una retta R passante per $Q(a, b, c)$ con giacitura $< le_1 + me_2 + ne_3 >$ non è parallela né a p_1 né a p_2 se e solo se $l - m + 2n \neq 0, m + n \neq 0$. Se ne conclude che le rette

$$R : \begin{cases} X = lt + a \\ Y = mt + b \\ Z = nt + c \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

per ogni $a, b, c, l, m, n \in \mathbb{R}$ tali che $l - m + 2n \neq 0, m + n \neq 0, (l, m, n) \neq (0, 0, 0)$, sono tutte le rette non parallele a p_1 ed a p_2. ∎

4. Sia a un numero reale, sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 con base $\{e_1, e_2, e_3\}$ e siano $v = e_1 + e_3, w = e_1 + 2e_2 + (a+4)e_3$. Sia $F : V \to V$ un'applicazione lineare tale che

$$F(e_1 + v) = w,\ F(e_1) = e_1 + 2e_3, F(e_2 + e_3) = e_1 - e_2.$$

(a) Determinare una matrice di F;

(b) scelto un valore di a, trovare una base di un autospazio di F;

(c) determinare i valori di a per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Da $F(e_1 + v) = w$ deduciamo che $F(2e_1 + e_3) = e_1 + 2e_2 + (a+4)e_3$. Inoltre $F(2e_1+e_3) = 2F(e_1)+F(e_3)$ da cui $F(e_3) = e_1+2e_2+(a+4)e_3-2F(e_1) = -e_1+2e_2+ae_3$. Da $F(e_2 + e_3) = e_1 - e_2$, essendo anche $F(e_2 + e_3) = F(e_2) + F(e_3)$ deduciamo che $F(e_2) = e_1 - e_2 - F(e_3) = 2e_1 - 3e_2 - ae_3$. Allora la matrice di F nella base $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ è

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & -a & a \end{pmatrix}$$

ed il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 2 & -1 \\ 0 & -3-T & 2 \\ 2 & -a & a-T \end{vmatrix} = (1-T)((-3-T)(a-T) + 2a) + 2(1-T) =$$

$$= (1-T)(T^2 + (3-a)T - a + 2) = (1-T)(T+1)(T-a+2)$$

e gli autovalori di F sono $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = a - 2$. Dunque

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$a = 3$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 2), $\lambda_2 = -1$ (m.a. 1)
$a = 1$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = -1$ (m.a. 2)
$a \neq 1, 3$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = -1$ (m.a. 1), $\lambda_3 = a - 2$ (m.a. 1)

(b) Consideriamo il caso $a = 3$ e calcoliamo la bae dell'autospazio associato a $\lambda_1 = 1$. Gli autovettori di F con autovalore 1 sono i vettori $xe_1 + ye_2 + ze_3$ tali che $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è soluzione del sistema $(M_e(F) - 1I_3)X = 0$, cioè

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene

$$\begin{cases} 2y - z = 0 \\ -4y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $x = -\frac{y}{2}, z = 2y$, da cui gli autovettori di F associati all'autovalore 1 sono tutti del tipo $-\frac{y}{2}e_1 + ye_2 + 2ye_3 = y(-\frac{1}{2}e_1 + e_2 + 2e_3)$. Ne segue che una base di $V_1(F)$ è $\{-\frac{1}{2}e_1 + e_2 + 2e_3\}$ e $\dim V_1(F) = 1$.

(c) Per la diagonalizzabilità di F abbiamo i seguenti casi:

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

1) $a = 3$

autovalore	m.g.	m.a.
1	1	2
-1	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è $2 < 3$ e quindi F non è diagonalizzabile.

2) $a = 1$.

Calcoliamo la molteplicità geometrica di $\lambda_2 = -1$. Si ha

$$\dim V_{-1}(F) = 3 - r(\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}) = 1$$

e quindi

autovalore	m.g.	m.a.
1	1	1
-1	1	2

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è $2 < 3$ e quindi F non è diagonalizzabile.

3) $a \neq 3, 1$

In questo F ha $3 = \dim \mathbb{R}^3$ autovalori distinti e quindi F è diagonalizzabile.

Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $a \neq 3, 1$. $\blacksquare$