UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2011-2012

Prova scritta del 12-9-2012

A. Svolgere tutti gli esercizi;

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - kX_2 + X_3 - X_4 = 2 \\ X_1 + X_2 - X_4 = 0 \\ X_1 + kX_3 + X_4 = 1 \\ X_2 - X_3 + 3kX_4 = 0. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan, determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Sia k un numero reale e sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Siano

$$v_1 = e_1 + ke_4, v_2 = e_1 - e_3, v_3 = e_1 + ke_2, v_4 = e_1.$$

(a) Siano $U =< v_1, v_2, v_3 >, W =< v_1, v_3, v_4 >$ i sottospazi generati. Calcolare $\dim U$ e $\dim W$;

(b) determinare tutti i valori di k (se esistono) tali che $U \subseteq W$;

(c) determinare tutti i valori di k (se esistono) tali che $\dim U \cap W = 3$.

3. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 3 su uno spazio vettoriale reale V e sia $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ un riferimento affine. Sia $A(-1, 1, 0)$ un punto di $\mathbf{A}$ e siano p_1 il piano in $\mathbf{A}$ di equazione cartesiana $X - Y + 2Z = 0$ e p_2 il piano in $\mathbf{A}$ passante per A e di giacitura $< e_1, e_2 - e_3 >$.

(a) Determinare tutte le rette R tali che R è parallela a p_2 ed interseca p_1 in un punto.

(b) Determinare tutti i piani p tali che p è parallelo a p_1 ed interseca p_2 in una retta.

(c) Determinare tutte le rette R tali che R non è parallela né a p_1 né a p_2.

4. Sia a un numero reale, sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 con base $\{e_1, e_2, e_3\}$ e siano $v = e_1 + e_3, w = e_1 + 2e_2 + (a + 4)e_3$. Sia $F : V \to V$ un'applicazione lineare tale che

$$F(e_1 + v) = w,\ F(e_1) = e_1 + 2e_3, F(e_2 + e_3) = e_1 - e_2.$$

(a) Determinare una matrice di F;

(b) scelto un valore di a, trovare una base di un autospazio di F;

(c) determinare i valori di a per i quali F è diagonalizzabile.