UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2011-2012

Prova scritta del 28-1-2013

TESTO E SOLUZIONI

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + kX_3 = 1 \\ kX_1 - X_2 - X_4 = k \\ X_1 + kX_3 + X_4 = 1 \\ kX_2 - X_3 - 3kX_4 = 0. \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Applichiamo il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli. Si ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 0 \\ k & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & k & -1 & -3k \end{pmatrix}, \quad (Ab) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 0 & 1 \\ k & -1 & 0 & -1 & k \\ 1 & 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & k & -1 & -3k & 0 \end{pmatrix}.$$

Si osserva subito che la colonna b dei termini noti è la stessa della prima colonna di A. Ne segue che $r(A) = r(Ab)$ per ogni k, dunque il sistema è compatible per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Ora calcoliamo le soluzioni. Si ha

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & k & 0 \\ k & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & k & -1 & -3k \end{vmatrix} = k(1-4k^2) = 0 \text{ se e solo se } k = 0, \pm\frac{1}{2}.$$

Se $k \neq 0, \pm\frac{1}{2}$ possiamo calcolare le soluzioni con la regola di Cramer (notare che ci sono matrici con colonne uguali):

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & k & 0 \\ k & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & k & -1 & -3k \end{vmatrix}}{k(1-4k^2)} = 1, \; X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ k & k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3k \end{vmatrix}}{k(1-4k^2)} = 0,$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ k & -1 & k & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & k & 0 & -3k \end{vmatrix}}{k(1-4k^2)} = 0, X_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & k & 1 \\ k & -1 & 0 & k \\ 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & k & -1 & 0 \end{vmatrix}}{k(1-4k^2)} = 0.$$

Sia ora $k = 0, \pm\frac{1}{2}$. Nella matrice A c'è il minore

$$\begin{vmatrix} k & -1 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & k & -1 \end{vmatrix} = -k^3 - 1 \neq 0,$$

dunque $r(A) = 3$ e, posto $X_4 = t$, è sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} kX_1 - X_2 = k + t \\ X_1 + kX_3 = 1 - t \\ kX_2 - X_3 = 3kt \end{cases}$$

che, per la regola di Cramer, ha soluzioni

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} k+t & -1 & 0 \\ 1-t & 0 & k \\ 3kt & k & -1 \end{vmatrix}}{-k^3-1} = \frac{k^3 + 4k^2t - t + 1}{k^3+1}, \; X_2 = \frac{\begin{vmatrix} k & k+t & 0 \\ 1 & 1-t & k \\ 0 & 3kt & -1 \end{vmatrix}}{-k^3-1} = \frac{3k^3t - kt - t}{k^3+1},$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} k & -1 & k+t \\ 1 & 0 & 1-t \\ 0 & k & 3kt \end{vmatrix}}{-k^3-1} = -\frac{k^2t + 4kt}{k^3+1}. \blacksquare$$

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U_k il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_2 - kX_3 = 0 \\ X_1 + kX_4 = 0 \end{cases}$$

e sia

$$W_k = < (1,1,0,1), (0,3,1,0), (2,-1,k,2) > .$$

(a) Determinare le dimensioni di U_k, W_k e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.

(b) Determinare la dimensione di $W_k \cap U_k$;

(c) Determinare se esiste k tale che $(W_k + U_k) \oplus (W_k \cap U_k) = \mathbb{R}^4$.

SOLUZIONE:

(a) I vettori di U_k soddisfano $X_1 = -kX_4, X_2 = kX_3$, dunque sono del tipo

$$(-kX_4, kX_3, X_3, X_4) = X_4(-k, 0, 0, 1) + X_3(0, k, 1, 0).$$

Si vede subito che $\{(-k,0,0,1),(0,k,1,0)\}$ è una base di U_k, quindi $\dim U_k = 2$ per ogni k. La dimensione di W_k è il rango di

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & k & 2 \end{pmatrix}.$$

Ora

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & k \end{vmatrix} = 3(k+1), \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

da cui una base di W_k è $\{(1,1,0,1),(0,3,1,0),(2,-1,k,2)\}$ se $k \neq -1$, mentre è $\{(1,1,0,1),(0,3,1,0)\}$ se $k = -1$ e $\dim W_k = \begin{cases} 3 & \text{if } k \neq -1 \\ 2 & \text{if } k = -1 \end{cases}$.

(b) Calcoliamo prima $\dim(U_k + W_k)$, cioè il rango di

$$A = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & k & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} -k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (k-3)(k+1)$$

pertanto $\dim(U_k + W_k) = 4$ se $k \neq -1, 3$.

Sia ora $k = -1, 3$. Si ha

$$\begin{vmatrix} -k & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k \neq 0, \begin{vmatrix} -k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & k & 2 \end{vmatrix} = (k^2+3)(k+1)$$

pertanto $\dim(U_3 + W_3) = 4$, $\dim(U_{-1} + W_{-1}) = 3$. Quindi

$$\dim(U_k + W_k) = \begin{cases} 4 & \text{if } k \neq -1 \\ 3 & \text{if } k = -1 \end{cases}.$$

Dalla formula di Grassmann si deduce, per ogni k, che

$$\dim(U_k \cap W_k) = \dim U_k + \dim W_k - \dim(U_k + W_k) = 1$$

(c) Dato che, ovviamente, $U_k \cap W_k \subseteq U_k + W_k$, si ha $\dim(U_k \cap W_k) \cap (U_k + W_k) = \dim(U_k \cap W_k) = 1$ e pertanto la loro somma non può essere diretta per nessun k. ■

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i due sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} X - Y = 0 \\ X + W = -1 \end{cases}, T_k : \begin{cases} X - W = 0 \\ Y + Z + W = -1 \\ kX - kZ = 0 \end{cases}.$$

(a) Calcolare la dimensione di S e di T_k.

(b) Determinare se esiste un k tale che S e T_k sono paralleli.

(c) Determinare se esiste un k tale che $S \cap T_k$ contiene una retta.

SOLUZIONE:

(a) La giacitura di S è data dal sistema omogeneo

$$\begin{cases} X - Y = 0 \\ X + W = 0 \end{cases}$$

dunque da tutti i vettori del tipo $(X, X, Z, -X) = X(1, 1, 0, -1) + Z(0, 0, 1, 0), X, Z \in \mathbb{R}$. Pertanto $\dim S = 2$. La giacitura di T_k è data dal sistema omogeneo

$$\begin{cases} X - W = 0 \\ Y + Z + W = 0 \\ k(X - Z) = 0 \end{cases}$$

dunque, se $k \neq 0$, da tutti i vettori del tipo $(X, -2X, X, X) = X(1, -2, 1, 1), X \in \mathbb{R}$, quindi $\dim T_k = 1$ se $k \neq 0$. Se $k = 0$ si ottengono invece tutti i vettori del tipo $(X, -X - Z, Z, X) = X(1, -1, 0, 1) + Z(0, -1, 1, 0), X, Z \in \mathbb{R}$, quindi $\dim T_0 = 2$.

(b) Dato che $\dim T_k \leq \dim S$, se esiste un k tale che S e T_k sono paralleli, si ha che la giacitura di T_k è contenuta in quella di S. Ma $(1, 2, -1, 1)$ appartiene alla giacitura di T_k ma non a quella di S. Pertanto non esiste un k tale che S e T_k sono paralleli.

(c) L'insieme $S \cap T_k$ si ottiene risolvendo

$$\begin{cases} X - Y = 0 \\ X + W = -1 \\ X - W = 0 \\ Y + Z + W = -1 \\ kX - kZ = 0 \end{cases}$$

che si vede subito non avere soluzioni se $k \neq 0$, mentre ha un'unica soluzione $X = Y = W = -\frac{1}{2}, Z = 0$, se $k = 0$. Dunque $S \cap T_k$ è vuoto o un punto, quindi non esiste un k tale che $S \cap T_k$ contiene una retta. ■

4. Sia a un numero reale, sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 con base $\{e_1, e_2, e_3\}$ e sia $v = (a-2)e_1 + (a-1)e_2$. Sia $F : V \to V$ un'applicazione lineare tale che

$$F(e_1) = ae_1 + ae_2 + e_3,\ F(e_3) = 2e_1 + e_2 + 2e_3, F(e_1 - e_2 - e_3) = v.$$

(a) Determinare una matrice di F;

(b) scelto un valore di a, trovare una base di un autospazio di F;

(c) determinare i valori di a per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Si verifica facilmente che $F(e_2) = F(e_1) - F(e_3) - v = -e_3$. Dunque la matrice di F nella base $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ è

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ed il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} a-T & 0 & 2 \\ a & -T & 1 \\ 1 & -1 & 2-T \end{vmatrix} = (a-T)(T-1+\sqrt{2})(T-1-\sqrt{2})$$

e gli autovalori di F sono $a, 1-\sqrt{2}$ e $1+\sqrt{2}$. Dunque

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$a = 1-\sqrt{2}$	$\lambda_1 = 1-\sqrt{2}$ (m.a. 2), $\lambda_2 = 1+\sqrt{2}$ (m.a. 1)
$a = 1+\sqrt{2}$	$\lambda_1 = 1+\sqrt{2}$ (m.a. 2), $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$ (m.a. 1)
$a \neq 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$	$\lambda_1 = a$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$ (m.a. 1), $\lambda_3 = 1+\sqrt{2}$ (m.a. 1)

(b) Calcoliamo la basi dell'autospazio associato ad a. Gli autovettori di F con autovalore a sono i vettori $xe_1+ye_2+ze_3$ tali che $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è soluzione del sistema $(M_e(F)-aI_3)X = 0$. Si ottiene

$$\begin{cases} 2z = 0 \\ ax - ay + z = 0 \\ x - y + (2-a)z = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $y = x, z = 0$, da cui gli autovettori di F associati all'autovalore a sono tutti del tipo $xe_1 + xe_2 = x(e_1 + e_2)$. Ne segue che una base di $V_a(F)$ è $\{e_1 + e_2\}$ e $\dim V_a(F) = 1$ per ogni a.

(c) Per la diagonalizzabilità di F abbiamo i seguenti casi:

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

1) $a = 1 - \sqrt{2}$

autovalore	m.g.	m.a.
$1 - \sqrt{2}$	1	2
$1 + \sqrt{2}$	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è $2 < 3$ e quindi F non è diagonalizzabile.

3) $a = 1 + \sqrt{2}$

autovalore	m.g.	m.a.
$1 + \sqrt{2}$	1	2
$1 - \sqrt{2}$	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è $2 < 3$ e quindi F non è diagonalizzabile.

4) $a \neq 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$

In questo caso F ha $3 = \dim V$ autovalori distinti e quindi F è diagonalizzabile.

Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $a \neq 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$. ■