UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2011-2012

Prima prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Per $h, k \in \mathbb{R}$ si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 + hX_2 + X_4 = -1 \\ X_1 + kX_3 + X_4 = 2 \\ -X_1 + 2X_3 - X_4 = -2 \\ X_1 + kX_2 + hX_3 = 1. \end{cases}$$

Utilizzando esclusivamente operazioni elementari, si determinino i valori di h, k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, si calcolino esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} k & h & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & k & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & k & h & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_3 abbiamo

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & k & 1 & 2 \\ k & h & 0 & 1 & -1 \\ 1 & k & h & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e le operazioni $R_2 \to R_2 + R_1, R_3 \to R_3 + kR_1$ e $R_4 \to R_4 + R_1$ danno la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & k+2 & 0 & 0 \\ 0 & h & 2k & 1-k & -1-2k \\ 0 & k & h+2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo ora $h \neq 0$. Con l'operazione $R_4 \to hR_4 - kR_3$ si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & k+2 & 0 & 0 \\ 0 & h & 2k & 1-k & -1-2k \\ 0 & 0 & h^2+2h-2k^2 & -h+k^2-k & -h+2k^2+k \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_2 con R_3, otteniamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & h & 2k & 1-k & -1-2k \\ 0 & 0 & k+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h^2+2h-2k^2 & -h+k^2-k & -h+2k^2+k \end{pmatrix}.$$

Supponiamo inoltre $k \neq -2$. Con l'operazione $R_3 \to \frac{1}{k+2} R_3$ si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & h & 2k & 1-k & -1-2k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h^2+2h-2k^2 & -h+k^2-k & -h+2k^2+k \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \to R_4 - (h^2+2h-2k^2)R_3$ si trova

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & h & 2k & 1-k & -1-2k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h+k^2-k & -h+2k^2+k \end{pmatrix}.$$

Se $h = k^2 - k$ il sistema è incompatibile dato che $-h + 2k^2 + k = k^2 + 2k \neq 0$.
Se $h \neq k^2 - k$ il sistema associato alla matrice C è a gradini e se ne determinano facilmente le soluzioni:

$$X_4 = \frac{-h+2k^2+k}{-h+k^2-k}, \; X_3 = 0,$$

$$X_2 = \frac{1}{h}(-1-2k-2kX_3+(k-1)X_4) = \frac{1}{h}(-1-2k+\frac{(k-1)(-h+2k^2+k)}{-h+k^2-k}) = \frac{k+2}{-h+k^2-k}$$

e

$$X_1 = 2 + 2X_3 - X_4 = 2 - \frac{-h+2k^2+k}{-h+k^2-k} = \frac{h+3k}{h-k^2+k}.$$

Supponiamo ora $k = -2$. Sostituendo nella matrice B si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & h & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h^2+2h-8 & -h+6 & -h+6 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_3 con R_4 abbiamo

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & h & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & h^2+2h-8 & -h+6 & -h+6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $h^2 + 2h - 8 = 0$, cioè se $h = 2, -4$, essendo $-h + 6 \neq 0$, il sistema è compatibile ed abbiamo, per $t \in \mathbb{R}$,

$$X_4 = 1,\ X_3 = t, X_2 = \frac{1}{h}(3 + 4X_3 - 3X_4) = \frac{4t}{h}$$

e

$$X_1 = 2 + 2X_3 - X_4 = 1 + 2t.$$

Se $h^2+2h-8 \neq 0$, cioè se $h \neq 2, -4$, il sistema è a gradini, dunque compatibile ed abbiamo, per $t \in \mathbb{R}$,

$$X_4 = t,\ X_3 = \frac{-h + 6 + (h-6)t}{h^2 + 2h - 8}, X_2 = \frac{1}{h}(3+4X_3-3X_4) = \frac{1}{h}(3-3t+\frac{4(-h+6+(h-6)t)}{h^2+2h-8})$$

e

$$X_1 = 2 + 2X_3 - X_4 = 2 - t + \frac{-2h + 12 + 2(h-6)t}{h^2 + 2h - 8}.$$

Infine supponiamo $h = 0$. Sostituendo nella matrice A si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & k+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & 1-k & -1-2k \\ 0 & k & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_2 con R_4, otteniamo la matrice

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & k & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2k & 1-k & -1-2k \\ 0 & 0 & k+2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq -2$, con l'operazione $R_4 \to \frac{1}{k+2} R_4$ si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & k & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2k & 1-k & -1-2k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - 2kR_4$ si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & k & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k & -1-2k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_3 con R_4, otteniamo la matrice

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & k & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k & -1-2k \end{pmatrix}.$$

Se $k=1$ si ha $-1-2k=-3$ ed il sistema è incompatibile.

Se $k=0$ si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_2 con R_3, otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - 2R_2$ si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \to R_4 + R_3$ si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ed il sistema è incompatibile.

Se $k \neq 0, 1$ il sistema associato alla matrice E è a gradini, dunque compatibile e si ha

$$X_4 = \frac{2k+1}{k-1},\ X_3 = 0,\ X_2 = \frac{1}{k}(-1-2X_3+X_4) = \frac{k+2}{k(k-1)} \text{ e } X_1 = 2+2X_3-X_4 = -\frac{3}{k-1}.$$

Infine supponiamo $k=-2$. Sostituendo nella matrice D si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il sistema è a gradini, dunque compatibile con soluzioni

$$X_4 = t,\ X_3 = \frac{3t-3}{4}, X_2 = -\frac{1}{2}(-1-2X_3+X_4) = \frac{t-1}{4} \text{ e } X_1 = 2+2X_3-X_4 = \frac{t+1}{2}.$$

In conclusione il sistema è compatibile se e solo se $k=-2$ o $k \neq -2$ e $h \neq k(k-1)$. ■

2. Sia a un numero reale e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & a & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i valori di a per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, si calcoli, con sole operazioni elementari, l'inversa.

(b) Sia

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di a per i quali esiste una matrice $B \in M_3$ tale che $BA = C$, senza ridurre il problema alla soluzione di un sistema lineare negli elementi di B.

SOLUZIONE:

Applichiamo operazioni elementari alla matrice

$$\begin{pmatrix} 8 & a & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_3 \to 8R_3 - aR_1$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 8 & a & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a^2+8 & -2a & -a & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_3 \to R_3 - (a^2-8)R_2$ si ha

$$\begin{pmatrix} 8 & a & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-2a-8 & -a & -a^2+8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Se $a^2-2a-8=0$, cioè se $a=-2,4$ allora $r(A)=2$ ed A non è invertibile.

Se $a \neq -2,4$ allora $r(A)=3$, quindi A è invertibile. In tal caso, con le operazioni $R_1 \to \frac{1}{8}R_1, R_2 \to -R_2$ e $R_3 \to \frac{1}{a^2-2a-8}R_3$, si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-a}{a^2-2a-8} & \frac{-a^2+8}{a^2-2a-8} & \frac{8}{a^2-2a-8} \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_1 \to R_1 - \frac{1}{4}R_3$ e $R_2 \to R_2 - R_3$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{8} & 0 & \frac{a^2-8}{8(a^2-2a-8)} & \frac{a^2-8}{4(a^2-2a-8)} & \frac{-2}{a^2-2a-8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a}{a^2-2a-8} & \frac{2a}{a^2-2a-8} & \frac{-8}{a^2-2a-8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-a}{a^2-2a-8} & \frac{-a^2+8}{a^2-2a-8} & \frac{8}{a^2-2a-8} \end{pmatrix}$$

ed infine l'operazione $R_1 \to R_1 - \frac{a}{8}R_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{a^2-2a-8} & \frac{-2}{a^2-2a-8} & \frac{a-2}{a^2-2a-8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a}{a^2-2a-8} & \frac{2a}{a^2-2a-8} & \frac{-8}{a^2-2a-8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-a}{a^2-2a-8} & \frac{-a^2+8}{a^2-2a-8} & \frac{8}{a^2-2a-8} \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{a^2-2a-8} & \frac{-2}{a^2-2a-8} & \frac{a-2}{a^2-2a-8} \\ \frac{a}{a^2-2a-8} & \frac{2a}{a^2-2a-8} & \frac{-8}{a^2-2a-8} \\ \frac{-a}{a^2-2a-8} & \frac{-a^2+8}{a^2-2a-8} & \frac{8}{a^2-2a-8} \end{pmatrix}.$$

(b) Se $a \neq -2, 4$ sappiamo da (a) che A è invertibile, quindi basta scegliere $B = CA^{-1}$. Se $a = -2, 4$ allora A ha rango 2 e le sue righe generano il sottospazio $< (0, 1, 1), (a, 1, 0) >$. Come abbiamo visto a lezione, in generale, presa una matrice B, le righe di BA sono combinazione lineare, negli elementi di B, delle righe di A. Ora, se $BA = C$, allora le righe di C appartengono a $< (0, 1, 1), (a, 1, 0) >$. Ma, per esempio, $(0, 1, 0) \notin < (0, 1, 1), (a, 1, 0) >$, dato che la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 3. Dunque per $a = -2, 4$ la matrice B non esiste. ∎

3. Sia $V = \mathbb{R}^4$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, e siano $w_1 = (-2, 0, 2, 3), w_2 = (-1, 0, \frac{2}{3}, 1)$, $w_3 = (\frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$ e $W =< w_1, w_2, w_3 >$.

(a) Calcolare la dimensione di W usando esclusivamente operazioni elementari sui vettori;

(b) Determinare due sottospazi U_1 e U_2 di V tali che :

$$U_1 \oplus W = U_2 \oplus W = U_1 \oplus U_2 = V;$$

(c) In generale, in uno spazio vettoriale X, data una somma diretta di sottospazi $X = U \oplus T$, si definisce la proiezione parallelamente ad U, $p_U : X \to T$, al modo seguente: se $x \in X$ allora sono univocamente determinati due vettori $u \in U, t \in T$ tali che $x = u + t$ e si definisce $p_U(x) = t$.

Siano ora V, W, U_1 ed U_2 come nella parte precedente dell'esercizio e siano $p_{U_1} : V \to W$ e $p_{U_2} : V \to W$ le due proiezioni parallelamente ad U_1 ed U_2. Determinare tutti i vettori $v \in V$ tali che $p_{U_1}(v) = p_{U_2}(v)$.

SOLUZIONE:

(a) Dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

moltiplicando la prima riga per $-\frac{1}{2}$, la seconda per -1 e la terza per 6, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

sottraendo la prima riga dalla seconda e dalla terza

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

moltiplicando la seconda riga per 3 e la terza per -1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

e sottraendo la seconda dalla terza

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

e dunque $\dim W = r(B) = 2$.

(b) Scegliamo $u_{11} = (0, 1, 0, 0), u_{12} = (0, 0, 0, 1), u_{21} = (0, 0, 1, 0), u_{22} = (1, 1, 0, 0)$ e sia $U_1 =< u_{11}, u_{12} >, U_2 =< u_{21}, u_{22} >$. Per verificare che

$$U_1 \oplus W = U_2 \oplus W = U_1 \oplus U_2 = V$$

è sufficiente, per la formula di Grassmann, verificare che $\{w_1, w_2, u_{11}, u_{12}\}$, $\{w_1, w_2, u_{21}, u_{22}\}$ e $\{u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}\}$ sono tre basi di V. Ciò è vero dato che le tre matrici

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hanno, come si può facilmente vedere, rango 4.
(c) Dato che in b) le somme sono dirette, si ha che $\forall v \in V$, esistono $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$, $w_4, w_5 \in W$ tali che $v = u_1 + w_4 = u_2 + w_5$.
Per definizione di proiezione si ha dunque $p_{U_1}(v) = w_4$ e $p_{U_2}(v) = w_5$. Ma se $w_4 = w_5$ si ha anche $u_1 = u_2$ e dunque $u_1 \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$, cioè $u_1 = 0$ e $v = w_4 \in W$. Del resto se $v \in W$ allora sicuramente $p_{U_1}(v) = v = p_{U_2}(v)$. Quindi l'insieme dei vettori $v \in V$ tali che $p_{U_1}(v) = p_{U_2}(v)$ è W. ■