UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2011-2012

Seconda prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Siano $k \in \mathbb{R}, v_1 = (1, -1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$v_1 \in N(F), v_2 \in N(F), F(E_2) = E_2 + kE_4, F(E_4) = E_2 + v_1,$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F. Inoltre, individuato, per un opportuno k, un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che v_1, v_2, E_2, E_4 sono linearmente indipendenti, e dunque una base di $\mathbb{R}^4$, in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

In tale base $e = \{v_1, v_2, E_2, E_4\}$ la matrice di F è data nel testo dell'esercizio

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$$

e pertanto il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} -T & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-T & 1 \\ 0 & 0 & k & -T \end{vmatrix} = T^2(T^2 - T - k)$$

e gli autovalori di F sono ottenuti risolvendo $T^2(T^2 - T - k) = 0$. Dunque, se $k < -\frac{1}{4}$, $\lambda_1 = 0$, mentre se $k \geq -\frac{1}{4}$, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4k}}{2}$. Notiamo che, se $k > -\frac{1}{4}$, si ha $\frac{1 \pm \sqrt{1+4k}}{2} = 0$ se e solo se si sceglie il segno $-$ e $k = 0$. Ne segue che gli autovalori di F sono

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k < -\frac{1}{4}$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2)
$k = -\frac{1}{4}$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2), $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ (m.a. 2)
$k = 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 3), $\lambda_2 = 1$ (m.a. 1)
$k > -\frac{1}{4}, k \neq 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2), $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{1+4k}}{2}$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$ (m.a. 1)

(b) Dato che la molteplicità geometrica è sempre almeno 1 e non può superare la molteplicità algebrica, ne segue che le dimensioni degli autospazi di F saranno 1 in tutti i casi nella tabella sopra nei quali la molteplicità algebrica è 1. Vediamo i casi restanti.

Posto $T = 0$ nella matrice $M_e(F) - TI_4$ si ottiene $r(M_e(F) - 0I_4) = r(M_e(F)) = 2$, da cui $\dim V_0(F) = 4 - 2 = 2$ (indipendentemente da k).

Se $k = -\frac{1}{4}$, abbiamo che $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ è l'autovalore da considerare nel punto (b), pertanto calcoliamo direttamente la base di $V_{\frac{1}{2}}(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore $\frac{1}{2}$ sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - \frac{1}{2}I_4)X = 0$ dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$. Si ottiene

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + w = 0 \\ -\frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2}z + w = 0 \\ -\frac{1}{4}z - \frac{1}{2}w = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $y = 0, z = -x, w = \frac{1}{2}x$, da cui gli autovettori di F associati all'autovalore $\frac{1}{2}$ sono tutti del tipo $xv_1 + 0v_2 - xE_2 + \frac{1}{2}xE_4 = x(v_1 - E_2 + \frac{1}{2}E_4)$. Ne segue che una base di $V_{\frac{1}{2}}(F)$ è $\{v_1 - E_2 + \frac{1}{2}E_4\}$ e $\dim V_{\frac{1}{2}}(F) = 1$.

(c) Per la diagonalizzabilità di F abbiamo i seguenti casi:

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

1) $k < -\frac{1}{4}$

autovalore	m.g.	m.a.
0	2	2

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è $2 < 4$ e quindi F non è diagonalizzabile.

2) $k = -\frac{1}{4}$

autovalore	m.g.	m.a.
0	2	2
$\frac{1}{2}$	1	2

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è $3 < 4$ e quindi F non è diagonalizzabile.

3) $k = 0$

autovalore	m.g.	m.a.
0	2	3
1	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è $3 < 4$ e quindi F non è diagonalizzabile.

4) $k > -\frac{1}{4}, k \neq 0$

autovalore	m.g.	m.a.
0	2	2
$\frac{1-\sqrt{1+4k}}{2}$	1	1
$\frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 4 e quindi F è diagonalizzabile.

Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $k > -\frac{1}{4}, k \neq 0$. ■

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i due sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} 3X + Y = 1 \\ X + Y + Z + W = 0 \end{cases}, T_k : \begin{cases} X + Y + W = -1 \\ Z - W = 0 \\ kX + kY + Z + W = 0 \end{cases}.$$

(a) Calcolare la dimensione di S e di T_k.

(b) Determinare se esiste un k tale che S e T_k sono paralleli.

(c) Dimostrare che se c'è un iperpiano di A che contiene S e T_k allora $k = 1$.

SOLUZIONE:

(a) Consideriamo le matrici del sistema che definisce S:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $r(B) = r(C) = 2$, da cui, per il teorema di Kronecker-Rouché-Capelli, $S \neq \emptyset$ ed è quindi un sottospazio. Inoltre la giacitura di S è data dal sistema omogeneo $Bx = 0$, dove $x = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$, per cui

$$\dim S = \dim A - r(B) = 4 - 2 = 2.$$

Consideriamo invece le matrici del sistema che definisce T_k:

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ k & k & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ k & k & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $r(B_k) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 2 \\ 2 & \text{se } k = 2 \end{cases}$, mentre $r(C_k) = 3$ per ogni k. Per il teorema di Kronecker-Rouché-Capelli, $T_k \neq \emptyset$ se e solo se $k \neq 2$. Dunque T_k è un sottospazio per $k \neq 2$ e la sua giacitura è data dal sistema omogeneo $B_k x = 0$, per cui

$$\dim T_k = \dim A - r(B_k) = 4 - 3 = 1.$$

Da ora in poi considereremo solo il caso $k \neq 2$.

(b) Si vede facilmente che le soluzioni del sistema omogeneo $Bx = 0$ sono $Y = -3X, W = 2X - Z$, da cui la giacitura di S è data dai vettori $Xe_1 - 3Xe_2 + Ze_3 + (2X - Z)e_4$. Inoltre si vede facilmente che le soluzioni del sistema omogeneo $B_k x = 0$ sono $Y = -X, Z = W = 0$, da cui la giacitura di T_k è data dai vettori $Xe_1 - Xe_2$. Se T_k fosse parallelo ad S si avrebbe che $e_1 - e_2$ starebbe nella giacitura di S, dunque $e_1 - e_2 = Xe_1 - 3Xe_2 + Ze_3 + (2X - Z)e_4$ per qualche $X, Y, Z, W \in \mathbb{R}$. Ma questo implica che $1 = X$ e $-1 = -3X$, assurdo. Pertanto, per ogni k, S e T_k non sono paralleli.

(c) Se esiste un iperpiano H di A che contiene S e T_k, allora, essendo H uno spazio affine di dimensione 3, ne segue che $S \cap T_k \neq \emptyset$, dato che non sono paralleli. Quindi il sistema

$$S \cap T_k : \begin{cases} 3X + Y = 1 \\ X + Y + Z + W = 0 \\ X + Y + W = -1 \\ Z - W = 0 \\ kX + kY + Z + W = 0 \end{cases}$$

deve essere compatibile. Risolvendo le prime quattro equazioni si vede facilmente che $X = \frac{3}{2}, Y = -\frac{7}{2}, Z = W = 1$, da cui, sostituendo nella quinta equazione si deduce $k = 1$. $\blacksquare$

3. Siano V e W due spazi vettoriali reali di dimensione finita, $\dim V \geq 2$ e $\dim W \geq 2$ e siano $F, G : V \to W$ due applicazioni lineari tali che $F \neq G$ e $N(F) = N(G)$.
(a) Dimostrare che se $W = \mathrm{Im}(F) \oplus \mathrm{Im}(G)$, allora $\dim W$ è pari e $\dim W \leq 2\dim V$.
(b) Sia ora W di dimensione dispari. È possibile che

$$\dim(\mathrm{Im}(F) \oplus \mathrm{Im}(G)) = \dim W - 1 \quad ?$$

SOLUZIONE:

(a) Sia $n = \dim V$ e $k = \dim N(F) = \dim N(G)$. Per il teorema rango-nullità si ha $\dim \mathrm{Im}(F) = n - k = \dim \mathrm{Im}(G)$, da cui

$$\dim W = \dim \mathrm{Im}(F) + \dim \mathrm{Im}(G) = 2(n - k) \leq 2n.$$

(b) Siano $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^3$ con rispettive basi canoniche $\{E_1, E_2\}$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(E_1) = 0, F(E_2) = e_1$ e sia $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $G(E_1) = 0, G(E_2) = e_2$. Si verifica facilmente che $N(F) = N(G) =< E_1 >$, mentre $\mathrm{Im}(F) =< e_1 >, \mathrm{Im}(G) =< e_2 >$. Pertanto $\mathrm{Im}(F) \cap \mathrm{Im}(G) = \{0\}$ e si ha

$$\dim(\mathrm{Im}(F) \oplus \mathrm{Im}(G)) = 2 = \dim W - 1. \blacksquare$$