UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2011-2012

Seconda prova di esonero

1. Siano $k \in \mathbb{R}, v_1 = (1,-1,0,0), v_2 = (1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$v_1 \in N(F), v_2 \in N(F), F(E_2) = E_2 + kE_4, F(E_4) = E_2 + v_1,$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F. Inoltre, individuato, per un opportuno k, un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i due sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} 3X + Y = 1 \\ X + Y + Z + W = 0 \end{cases}, T_k : \begin{cases} X + Y + W = -1 \\ Z - W = 0 \\ kX + kY + Z + W = 0 \end{cases}.$$

(a) Calcolare la dimensione di S e di T_k.

(b) Determinare se esiste un k tale che S e T_k sono paralleli.

(c) Dimostrare che se c'è un iperpiano di A che contiene S e T_k allora $k = 1$.

3. Siano V e W due spazi vettoriali reali di dimensione finita, $\dim V \geq 2$ e $\dim W \geq 2$ e siano $F, G : V \to W$ due applicazioni lineari tali che $F \neq G$ e $N(F) = N(G)$.

(a) Dimostrare che se $W = \mathrm{Im}(F) \oplus \mathrm{Im}(G)$ allora $\dim W$ è pari e $\dim W \leq 2\dim V$.

(b) Sia ora W di dimensione dispari. È possibile che

$$\dim(\mathrm{Im}(F) \oplus \mathrm{Im}(G)) = \dim W - 1 \;\; ?$$