GE110 Soluzioni Tutorato 10

a cura di Giordano Agostini, Giulia Salustri e Andrea Cattaneo

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

1. Sia f l'operatore di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Calcolare $Dim(Ker(f))$ e $Dim(Im(f))$

Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
In generale $dim(Im(f)) = r(A)$, A matrice associata a f, mentre $dim(Ker(f)) = n - dim(Im(f))$, dove n è la dimensione del dominio, per il teorema della nullità più rango.
Infatti sia $\{e_1; e_2; e_3; e_4\}$ base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\underline{x} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \rightarrow \underline{x} = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4$ e $f(x) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) + tf(e_4)$ in quanto f funzione lineare.
$f(\underline{x})$ è dunque combinazione lineare dei vettori immagine della base canonica, ossia $Im(f) =< f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4) >$. Tuttavia questi costituiscono le colonne della matrice associata a $f \rightarrow dim(Im(f)) = r(A)$, ossia il massimo numero di vettori lin. ind. tra i vettori immagine della base.
In questo caso $det(A) = 4$, dunque la matrice ha rango massimo $\rightarrow dim(Im(f)) = 4$ e $dim(Ker(f)) = 44 = 0$.

2. Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita come $F(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 - \frac{1}{3}x_2, 2x_1 + x_2)$;e sia $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita come $G(y_1, y_2, y_3) = (-y_1 + y_3, \frac{y_1}{2} + y_2 - 3y_3)$.
Le applicazione F e G sono iniettive? E suriettive?

$N(F) = \{(0,0)\} \Longrightarrow F$ è iniettiva!
$dim(N(F)) + dim(Im(F)) = dim(\mathbb{R}^2) \Rightarrow 0 + rg(F) = 2 \Rightarrow rg(F) = 2 \neq 3$
F non è suriettiva.
$N(G) = (\frac{2}{5}t, t, \frac{2}{5}t) \forall t \in \mathbb{R} \Longrightarrow dim(N(G)) = 1 \Longrightarrow G$ non iniettiva.
$rg(G) = 3 - 1 = 2 \Longrightarrow G$ è suriettiva.

3. Si stabilisca, al variare del parametro reale b, quando le seguenti matrici sono invertibili. Se invertibili, trovare l'inversa.
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & b \\ b & b & 0 \\ -1 & 0 & b \end{pmatrix}$
$B = \begin{pmatrix} b & b & 1 \\ 1 & b & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & b & -1 \\ 3 & 2 & b \end{pmatrix}$
$D = \begin{pmatrix} 2b & -1 & b \\ 2 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$det(A) = 0$ indipendentemente dal valore di b, inoltre $det(A(13|12)) = 1$ quindi il rango di A è sempre uguale a due.Quindi non è diagonalizzabile.
$det(B) = 2b^2 - 2b$ quindi B è invertibile $\Leftrightarrow b \notin \{0,1\}$.In questo caso abbiamo che $B^{-1} = \frac{1}{b^2-b} \begin{pmatrix} 2b & -2b & 2b \\ -2 & 2b & -3b+1 \\ 0 & 0 & b^2-b \end{pmatrix}$.
$det(C) = b^2 - 6b - 1$ quindi C è invertibile $\Leftrightarrow b \notin \{3 \pm \sqrt{10}\}$,in questo caso $C^{-1} = \frac{1}{b^2-6b-1} \begin{pmatrix} b^2+2 & -b+4 & -2b-1 \\ -3 & b-6 & 1 \\ -3b & 1 & b \end{pmatrix}$.
$det(D) = -2b^2 + 2b + 2$ quindi D è invertibile $\Leftrightarrow b \notin \{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}\}$, in questo caso $D^{-1} = \frac{1}{-2b^2+2b+2} \begin{pmatrix} -b & b+1 & -b \\ -2 & 2b & -2b^2+2b \\ 2 & 2b & 2 \end{pmatrix}$.

4. Siano $v = \{(1,1,-1),(1,-1,-1),(-1,-1,-1)\}$ e
$w = \{(1,0,1,-1),(-1,1,1,0),(0,0,1,-1),(1,0,-1,-1)\}$
due basi rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ e siano F, G, H, I le seguenti applicazioni lineari:
$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) = (x+z, x+2y, 2x+3y+z)$
$G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $G(x,y,z) = (x+z, x+y+z, x-y+2z, 2x+y+2z)$
$H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $H(x,y,z,w) = (x+2z+w, x-y-z+w, y-w)$
$I : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $I(x,y,z,w) = (x+z+w, 2x+y+w, x-y-2z+w, y-z+w)$
Determinare le matrici $M_v(F)$, $M_{w,v}(G)$, $M_{v,w}(H)$ e $M_w(I)$ associate a tali applicazioni.

- Iniziamo dalla matrice $M_v(F) = M_{v,v}(F)$. Sia $e = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Per spiegare il procedimento da seguire consideriamo il seguente schema:

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, "\star"] \arrow[d, "\mathbb{I}"'] & v \arrow[d, "\mathbb{I}"] \\ e \arrow[r, "F"'] & e \end{tikzcd}$$

  dove con $\star$ è indicato il passaggio richiesto dall'esercizio. Leggendo il diagramma da destra in alto in senso orario otteniamo la seguente formula:
  $M_v(F) = M_{v,e}(\mathbb{I})M_e(F)M_{e,v}(\mathbb{I})$. Spieghiamo il significato delle tre matrici:

  - $M_e(F)$ si ottiene sostituendo i vettori della base canonica nella legge di F e incolonnando i vettori ottenuti in una matrice; nel nostro caso:
    $F(1,0,0) = (1,1,2)$, $F(0,1,0) = (0,2,3)$, $F(0,0,1) = (1,0,1)$
    $\Rightarrow M_e(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
  - $M_{e,v}(\mathbb{I})$ si ottiene mettendo in colonna in una matrice i tre vettori della base v data; nel nostro caso: $M_{e,v}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
  - $M_{v,e}(\mathbb{I}) = (M_{e,v}(\mathbb{I}))^{-1}$

- Sia ora E la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Consideriamo il seguente schema:

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, "\star"] \arrow[d, "\mathbb{I}"'] & w \arrow[d, "\mathbb{I}"] \\ e \arrow[r, "G"'] & E \end{tikzcd}$$

  Leggendo come prima otteniamo: $M_{w,v}(G) = M_{w,E}(\mathbb{I})M_{E,e}(G)M_{e,v}(\mathbb{I})$. Analizziamo le tre matrici:

  - $M_{w,E}(\mathbb{I}) = (M_{E,w}(\mathbb{I}))^{-1}$ dove $M_{E,w}(\mathbb{I})$ si ottiene incolonnando i vettori della base w data in una matrice, cioè $M_{E,w}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
  - $M_{E,e}(G)$ si ottiene come prima: $G(1,0,0) = (1,1,1,2)$, $G(0,1,0) = (0,1,-1,1)$, $G(0,0,1) = (1,1,2,2) \Rightarrow M_{E,e}(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
  - $M_{e,v}(\mathbb{I})$ è la matrice che ha per colonne i vettori della base v.

- Il procedimento è lo stesso seguito per G.
- Il procedimento è lo stesso seguito per F.

5. Sia f l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ cui, rispetto alla base canonica, è associata la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}$ con $h \in \mathbb{R}$.
   Trovato il valore di h per cui f non è suriettiva:
   (a) determinare $Im(f)$;
   (b) determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, k^2 - k, k)$ appartiene a $Im(f)$;
   (c) trovare un vettore di $\mathbb{R}^3$ privo di controimmagini;
   (d) determinare $Ker(f)$;
   (e) verificare che $Ker(f) \cap Im(f) = \{\underline{0}\}$;
   (f) esistono dei vettori $u \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(u) = (3, 2, -2)$?
   (g) trovare i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = f(x)$, dove $f(x) = (1, 2, -1)$.

$C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}, h \in \mathbb{R}$

Ricordiamo che f non è suriettiva $\Leftrightarrow$ il rango di C non è massimo $\Leftrightarrow Det(C) = 0$. Poiché $Det(C) = 3h - 6 \Rightarrow Det(C) = 0 \Leftrightarrow h = 2$. A questo punto sostituiamo il valore di h trovato nella matrice C.

(a) $dim(Im(f)) = r(C) = 2$ in quanto esiste un minore di ordine due non nullo $\Rightarrow$ l'immagine è generata da due vettori linearmente indipendenti che vi appartengano, in quanto la dimensione del sottospazio è 2 (va bene qualsiasi coppia di vettori che soddisfino questi due requisiti)$\Rightarrow Im(f) =< (2, 1, -1), (1, 2, 1) >$.

(b) Il vettore $(1, k^2 - k, k) \in Im(f)$ se può essere scritto come combinazione lineare dei vettori che ne costituiscono la base, ossia se è linearmente dipendente da questi, ossia se: $det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k^2 - k \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow k = 1 \pm \sqrt{2}$. Per tali valori di k il vettore appartiene a $Im(f)$.

(c) Basta trovare un vettore di $\mathbb{R}^3$ che non appartiene a $Im(f) \Rightarrow$ sfrutto il punto precedente e sostituisco al vettore un valore di $k \neq 1 \pm \sqrt{2}$, sia $k = 1 \Rightarrow$ il vettore $(1, 0, 1)$ non appartiene all'immagine.

(d) $dim(Ker(f)) = 1$ per il teorema di nullità più rango. Per trovare il vettore che mi genera il nucleo basta risolvere il sistema omogeneo $Cx = 0$ che ha soluzioni $(z, -z, z)$, $z \in \mathbb{R} \Rightarrow Ker(f) =< (1, -1, 1) >$.

(e) $Ker(f) \cap Im(f) = x \Leftrightarrow$ i vettori della base dell'immagine e i vettori della base del nucleo sono linearmente dipendenti tra loro (vedi formula Grassmann vettoriale). In questo caso basta verificare che la matrice $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ abbia rango massimo, ossia $|A| \neq 0$.

(f) Per farlo dobbiamo mostrate che $(3, 2, 2) \in Im(f)$, Ciò accade se e solo se il vettore può essere scritto come combinazione lineare della base, e quindi è linearmente dipendente da questi. Dunque considero la matrice $B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, dove i primi due vettori colonna sono i vettori della base di $Im(f)$, mentre l'ultimo è il vettore che devo controllare appartenga all'immagine. Quindi se calcolo $det(B)$ si presentano due casi:

- se $det(B) = 0 \Rightarrow$ il vettore è linearmente dipendente dai vettori che costituiscono la base di $Im(f)$ e quindi vi appartiene;
- se $det(B) \neq 0 \Rightarrow$ il vettore è linearmente indipendente dai vettori della base di $Im(f)$, quindi non può essere scritto come loro combinazione lineare $\Rightarrow$ non appartiene all'immagine. In questo caso $det(B) = 7$.

(g) Devo determinare quali sono i vettori $v = (x, y, z)$ t.c. $f(v) = (1, 2, -1)$. Basterà risolvere il sistema lineare $Cv = (1, 2, -1)$ in quanto le soluzioni di questo sistema individuano tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ che hanno come immagine tramite f proprio il vettore $(1, 2, -1)$. In questo caso il sistema ammette ∞^1 soluzioni del tipo $(2 + t, 1 - t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.