GE110 Tutorato 11

a cura di Giordano Agostini, Giulia Salustri e Andrea Cattaneo

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

1. Sia $T \in End(\mathbb{R}^3)$ l'applicazione lineare tale che: $T(0,1,2) = (2,0,1)$, $T(1,0,1) = (0,-1,1)$ e $T(1,1,0) = (1,1,0)$.
Trovare le matrici di cambiamento di base $M_{E,B}(\mathbb{I}_3)$ e $M_{B,E}(\mathbb{I}_3)$, dove E è la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $B = \{(0,-1,-1),(2,0,1),(1,1,0)\}$ e le matrici che rappresentano T rispetto a queste due basi.

Sarà sicuramente utile trovare la legge di T; per fare ciò useremo la matrice associata a T (chiamiamola A) e il fatto che, dato un vettore qualsiasi $v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow T(v) = Av$. Quindi, se $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ abbiamo che:

- $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b + 2c = 2 \\ e + 2f = 0 \\ h + 2i = 1 \end{cases}$
- $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ d + f = -1 \\ g + i = 1 \end{cases}$
- $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ d + e = 1 \\ g + h = 0 \end{cases}$

Riordinando opportunamente le equazioni otteniamo 3 sistemi di 3 equazioni in 3 incognite, cioè 9 soluzioni distinte che andranno a formare la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.
Sia ora $B = \{(0,-1,-1),(2,0,1),(1,1,0)\}$.
$M_{E,B}(\mathbb{I}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$M_{B,E}(\mathbb{I}_3) = (M_{E,B}(\mathbb{I}_3))^{-1}$.
$M_E(T) = A$.
$M_B(T) = (M_{E,B}(\mathbb{I}_3))^{-1} M_E(T) M_{E,B}(\mathbb{I}_3)$.

2. Siano A e B due matrici simili; si dimostri che:

   (a) $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$;

   (b) $tr(A) = tr(B)$;

   (c) A^n e B^n sono simili.

   Iniziamo con la risoluzione dell'esercizio:

   (a) A e B simili $\Rightarrow A = MBM^{-1}$ dove $M \in GL_n(K)$.
   $P_A(\lambda) = Det(A - \lambda\mathbb{I}) = Det(MBM^{-1} - \lambda\mathbb{I}) = Det(MBM^{-1} - M\lambda\mathbb{I}M^{-1}) = Det(M(B-\lambda\mathbb{I})M^{-1}) = Det(M)Det(B-\lambda\mathbb{I})(Det(M))^{-1} = Det(B - \lambda\mathbb{I}) = P_B(\lambda)$.

   (b) Usando il punto precedente, l'ipotesi diventa $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$. Supponiamo dapprima $n = 2$ e scriviamo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   $Det(A - \lambda\mathbb{I}) = Det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + Det(A) = \lambda^2 - tr(B)\lambda + Det(B) \Rightarrow tr(A) = tr(B)$.
   In generale $A = (a_{i,j}) \Rightarrow Det(A - \lambda\mathbb{I}) = (-\lambda)^n \pm tr(A)\lambda^{n-1} + q(\lambda)$ dove $deg(q) \leq n - 2$ e le conclusioni sono le stesse.

   (c) Lavoriamo per induzione su n.
   Sappiamo che $\exists P \in GL_n(K) : P^{-1}AP = B$. Dobbiamo provare che $\exists Q \in GL_n(K) : Q^{-1}A^2Q = B^2$.
   $B^2 = (P^{-1}AP)^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}A^2P$. Ora, sia A^{n-1} simile a B^{n-1} e si abbia per ogni $n \geq 2$ la seguente ipotesi: $\exists P \in GL_n(K) : P^{-1}A^{n-1}P = B^{n-1}$. Allora $B^n = B^{n-1}B = P^{-1}A^{n-1}P \cdot P^{-1}AP = P^{-1}A^nP$. Rimane da provare che se $B = P^{-1}AP \Rightarrow B^n = P^{-1}A^nP$ (cioè la matrice P è sempre la stessa). Lavoriamo di nuovo per induzione. Per $n = 2$ l'abbiamo già mostrato. Supponiamo che per $n \geq 3$ sia vero che $B^{n-1} = P^{-1}A^{n-1}P$. Allora:
   $B^n = (P^{-1}A^{n-1}P)(P^{-1}AP)$. $\square$

3. Per ognuno dei seguenti operatori lineari F, G, $H : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, verificare se sono diagonalizzabili; in tal caso, trovare una base $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ di autovettori, scrivere la formula di passaggio da $M_e(\star)$ a $M_b(\star)$ ($\star = F, G, H$ rispettivamente), dove $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica, e

verificare che quest'ultima matrice è diagonale:
$F(x, y, z) = (x + z, -x + y, x + z)$;
$G(x, y, z) = (x + 2z, 2x + y, x + y + z)$;
$H(x, y, z) = (x - y + 2z, -x + y - z, 2x + y + z)$.

Per determinare se F è diagonalizzabile, rappresentiamola in forma matriciale rispetto alla base canonica e calcoliamone il polinomio caratteristico:
$P_F(\lambda) = det(M_e(F) - \lambda \mathbb{I}_3) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Ci sono quindi 3 autovalori distinti (0,1 e 2) e perciò F è diagonalizzabile; per determinare una base di autovettori, cerchiamo i generatori dei rispettivi autospazi, cioè delle soluzioni dei sistemi omogenei $(M_e(F) - \lambda \mathbb{I}_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, per $\lambda = 0, 1, 2$. Per $\lambda = 0$ troviamo un sistema di soluzioni $< (1, 1, -1) >$; per $\lambda = 1 \Rightarrow < (0, 1, 0) >$ e infine per $\lambda = 2 \Rightarrow < (1, -1, 1) >$. Quindi una base di autovettori per F sarà proprio $\{(1, 1, -1), (0, 1, 0), (1, -1, 1)\}$. Per passare dalla base canonica a quella composta da questi autovettori, abbiamo che $M_b(F) = M_{b,e}(\mathbb{I}_3) M_e(F) M_{e,b}(\mathbb{I}_3)$, che è una matrice diagonale.
Ragionando come sopra abbiamo che $P_G(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 1)$. Abbiamo dunque un unico autovalore reale con molteplicità algebrica 1, quindi l'autospazio relativo a tale autovalore avrà dimensione 1; quindi, essendo la somma delle dimensioni degli autospazi strettamente minore dello spazio su cui G è definita, l'applicazione non è diagonalizzabile.
$P_H(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3)$, quindi gli autovalori di H sono 3, reali e distinti, e H risulta diagonalizzabile. Facilmente si verifica che una base di autovettori è $\{(1, -2, -1), (1, 0, -1), (1, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5})\}$. Ora basterà usare la stessa formula usata per F.

4. Trovare gli autovalori e gli autovettori delle seguenti matrici:
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,
$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Stabilire poi se sono o meno diagonalizzabili.

- Gli autovalori di una matrice sono le radici del polinomio caratteristico; questo si ottiene ponendo uguale a 0il determinante della matrice $A - \lambda\mathbb{I}$, in questo caso:
$P_\lambda(A) = Det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2; \lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2}$.
Gli autospazi relativi ai vari autovalori λ_i, V_{λ_i},corrispondono al nucleo dell'applicazione lineare rappresentata dalla matrice $A - \lambda_i\mathbb{I}$,quindi gli elementi dell'i-esimo autospazio sono tutte e sole le soluzioni del sistema omogeneo $(A - \lambda_i\mathbb{I})\underline{x} = \underline{0}$, dove $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$. Gli autospazi sono generati proprio dagli autovettori della matrice. In questo caso:
$V_{\lambda_1} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \{(t, 0, t) \in \mathbb{R}^3 tc \ \ t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$: $(1, 0, 1)$ é un autovettore relativo all'autovalore 2.
Allo stesso modo si trova che:$V_{\lambda_2} =< (1, -\sqrt{2}, 1) >$ e $V_{\lambda_3} =< (1, \sqrt{2}, 1) >$.
Affinché la matrice sia diagonale deve accadere che per ogni autovalore la molteplicità algebrica (ossia il numero di volte che l'autovalore compare come radice del polinomio caratteristico) sia uguale alla molteplicità geometrica(ossia la dimensione dell'autospazio relativo).
In generale la prima è sempre maggiore o uguale della seconda. Se trovo tutti autovalori distinti, come in questo caso, la matrice è diagonalizzabile, in quanto se λ è un autovettore il suo autospazio associato deve avere dimensione maggiore o uguale a 1 e la molt. algebrica è uguale a 1. Per quanto detto prima segue subito la diagonalizzabilità della matrice.

- $B \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 4 - \sqrt{2},\ \lambda_3 = 4 + \sqrt{2}$.
$V_{\lambda_1} =< (2, 3, 1) >,\ V_{\lambda_2} =< (4 + 3\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 1) >,\ V_{\lambda_3} =< (4 - 3\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}, 1) >$. Diagonalizzabile.

- $C \quad \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 3$.
$V_{\lambda_1} =< (-1, 0, 2) >,\ V_{\lambda_2} =< (0, 1, 0) >,\ V_{\lambda_3} =< (2, 0, 1) >$. Diagonalizzabile.

- $D \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$(con molteplicità algebrica 2), $\lambda_3 = 3$.
$V_{\lambda_1} =< (1,1,1,0) >,\ V_{\lambda_2} =< (0,0,0,1), (-1,0,1,0) >,\ V_{\lambda_3} =< (1,-2,1,0) >$. Diagonalizzabile, in quanto tutti gli autovalori hanno molteplicità algebrica uguale alla molteplicità geometrica.

- $E \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$(con molteplicità algebrica 2), $\lambda_3 = 2$.
$V_{\lambda_1} =< (0,1,1,0) >,\ V_{\lambda_2} =< (0,0,0,1), (1,0,0,0) >,\ V_{\lambda_3} =< (0,-1,1,0) >$. Diagonalizzabile in quanto tutti gli autovalori hanno molteplicità algebrica uguale alla molteplicità geometrica.

5. Si consideri la matrice simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

(a) Decidere se A è invertibile e, in caso affermativo, determinare A^{-1};
(b) Calcolare gli autovalori e gli autospazi di A;
(c) Determinare una matrice P tale che $P^{-1}AP = D$, dove D è una matrice diagonale.
Supponiamo che la matrice A rappresenti l'operatore T nella base canonica e di $\mathbb{R}^3$.

(a) $det(A) = 7 \Rightarrow A$ è invertibile e $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(Cof(A))^t = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$;
(b) $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7 = -(\lambda - 7)(\lambda - 1)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 7; \lambda_2 = 1$ con $\mu_1 = 1; \mu_2 = 2$
Calcolando gli autospazi nel modo usuale: $V_1 =< (1,-2,-1) >; V_2 =< (2,1,0), (1,0,1) >$.
OSS: abbiamo trovato che la molteplicitá algebrica degli autovalori corrisponde alla loro molteplicità geometrica dunque $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$ e mettendo assieme le basi degli autospazi otteniamo la base:
$\underline{d} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ diagonalizzante per A.
(c) Secondo la base d la matrice che rappresenta l'operatore associato ad A è $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice diagonale).
Quindi sappiamo che applicando le regole del cambiamento di base:

$M_{\underline{d},e}(\mathbb{I})AM_{e,\underline{d}}(\mathbb{I}) = D \Rightarrow P^{-1} = M_{\underline{d},e}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ che si ottiene mettendo in colonna le componenti dei vettori della base d rispetto alla base canonica $\Rightarrow P = M_{e,\underline{d}}(\mathbb{I}) = (M_{\underline{d},e}(\mathbb{I})^{-1}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Dopo aver trovato l'endomorfismo a essa associato, si verifichi se A è diagonalizzabile.

   Innanzitutto sia T l'endomorfismo associato alla matrice A. Allora T è tale che $T(x, y, z) = (0, z, -y)$; ora, $P_T(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + 1)$; ciò significa che T ha un solo autovalore reale con molteplicità algebrica 1 e di conseguenza l'autospazio generato dall'autovettore associato a tale λ avrà dimensione 1. Le conclusioni sono le stesse dell'esercizio 3, funzione G.