Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato 1 Ge110

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Giordano Agostini, Giulia Salustri e Andrea Cattaneo

Soluzioni tutorato 1

1. Si calcoli quando possibile:
$A(BC), (AB)C, A^t(BC), (AB)C^t, A(BC)^t, (AB)^tC, A^2(BC), (AB)C^2$

- i)$A(BC) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \right) =$
$= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 5 \\ 12 & -19 \end{pmatrix}$
ii)$(AB)C = \left(\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 11 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 5 \\ 12 & -19 \end{pmatrix}$
iii)$A^t(BC) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^t \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \right) =$
$= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 18 & -21 \end{pmatrix}$
iv)$(AB)C^t = \left(\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t =$
$= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 11 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 4 & -41 \end{pmatrix}$
v)$A(BC)^t = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \right)^t = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}^t =$
$= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 30 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$
vi)$(AB)^tC = \left(\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right)^t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 11 & -4 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 & 17 \\ 12 & -13 \end{pmatrix}$
vii)$A^2(BC) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^2 \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 16 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} -75 & 25 \\ -6 & -47 \end{pmatrix}$
viii)$(AB)C^2 = \left(\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 11 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} -15 & 25 \\ 57 & -50 \end{pmatrix}$

- i)$A(BC) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \right) =$

$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 4 \end{pmatrix}$

ii)$(AB)C = \left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 12 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -20 \end{pmatrix}$

iii)$A^t(BC)$ non é risolubile poiché il numero di colonne della matrice A^t é diverso dal numero di righe della matrice prodotto (BC).

iv)$(AB)C^t$ non é risolubile poiché il numero di colonne della matrice prodotto (AB) é diverso dal numero di righe della matrice C^t.

v)$A(BC)^t$ non é risolubile poiché il numero di colonne della matrice A é diverso dal numero di righe della matrice prodotto $(BC)^t$.

vi)$(AB)^tC = \left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \right)^t \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 12 & -16 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ -11 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & -43 \end{pmatrix}$

vii)$A^2(BC)$ poiché la matrice A non é una matrice quadrata avremo lo stesso problema trovato nei punti precedenti.

viii)$(AB)C^2$ poiché la matrice C non é una matrice quadrata avremo lo stesso problema trovato nei punti precedenti.

- i)$A(BC)$ non é risolubile poiché il numero di colonne della matrice A é diverso dal numero di righe della matrice prodotto (BC).

  ii)$(AB)C$ non é risolubile poiché il numero di colonne della matrice A é diverso dal numero di righe della matrice (B).

  iii)$A^t(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right) =$

  $= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 12 & -1 \\ 9 & 6 & 0 \\ 30 & 21 & -1 \end{pmatrix}$

  iv)$(AB)C^t$ non é risolubile poiché il numero di colonne della matrice A é diverso dal numero di righe della matrice B.

  v)$A(BC)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}^t =$

  $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 18 & 5 \end{pmatrix}$

  vi)$(AB)^tC$ non é risolubile poiché il numero di colonne della matrice A é diverso dal numero di righe della matrice B.

  vii)$A^2(BC)$ e $(AB)C^2$ come giá detto solo le matrici quadrate possono essere elevate a potenza.

2. Si trovi per ognuna delle seguenti matrici A una matrice M t.c.:

   - il prodotto righe per colonne AM sia ben definito.

- $AM = 0$ (matrice nulla).
- $AM = MA = I$ dove I è la matrice quadrata con tutti 1 sulla diagonale principale e 0 in tutte le altre entrate. Tale matrice prende nome di $Matrice\ identita'$.
- i)a=$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ pongo la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ da cui avró:
  $aM = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
  $\begin{cases} 3a + 2c = 0 \\ 3b + 2d = 0 \\ 4a + c = 0 \\ 4b + d = 0 \end{cases}$
  ne segue che $a = 0, b = 0, c = 0, d = 0$ e perció la matrice M sarà della forma:
  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  Con lo stesso metodo risolvo gli altri esercizi:
  ii)b=$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice M sará del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con a e b che variano.
  iii)c=$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice M sará necessariamente la matrice nulla.
  iv)d=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ la matrice M sará necessariamente una matrice con 3 righe, ad esempio posta $dM = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = 0$, possiamo prendere $M = \begin{pmatrix} e & f \\ -2e & -2f \\ e & f \end{pmatrix}$.
  v)e=$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice M sará necessariamente una matrice con 2 righe,ad esempio posta $eM = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = 0$, dobbiamo prendere $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  vi)f=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice M sará necessariamente $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  vii)g=$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$ la matrice M sará necessariamente $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- i)a=$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ pongo la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ da cui avró:
  $aM = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3a+2c=1 \\ 3b+2d=0 \\ 4a+c=0 \\ 4b+d=1 \end{cases}$$

ne segue che $a=-\frac{1}{5}, b=\frac{2}{5}, c=\frac{4}{5}, d=-\frac{3}{5}$ e perció la matrice M sarà della forma:

$M=\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Con lo stesso metodo risolvo gli altri esercizi:

ii)b=$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non esiste una matrice M che sia l'inversa della matrice b.

iii)c=$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice M sará $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

iv)d=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ e e=$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$: é possibile trovare l'inversa solo per le matrici quadrate.

v)f=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice M sará $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 1 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

vi)g=$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$ non esiste una matrice M che sia l'inversa della matrice g.

3. Si trovi per quali valori reali del parametro k la matrice A é simmetrica e per quale k la matrice B é antisimmetrica:
   *PS:il contenuto dell'esercizio è stato modificato per renderlo piú coerente con quanto richiesto nel testo.
   *PPS:ho pensato che il vostro approccio all'esercizio fosse piú interessante rispetto a quello che vi abbiamo presentato...quindi eccolo qui:

$$A=\begin{pmatrix} 7 & k^4-3k+1 & 2 \\ k^4+2k-3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} k^3+\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k & -2 & k^3+4k^2+k-8 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & k^3-5k^2+4k & 0 \end{pmatrix}.$$

- Affinché la matrice A sia simmetrica é necessario che $k^4-3k+1=k^4+2k-3$ e questo accade $\Leftrightarrow k=\frac{4}{5}$; poiché la matrice diventa $A=\begin{pmatrix} 7 & -\frac{619}{625} & 2 \\ -\frac{619}{625} & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
- Per prima cosa bisogna ricordarsi che la diagonale di una matrice antisimmetrica deve essere composta di soli zeri; quindi non esiste alcun k per cui la matrice B sia antisimmetrica.

4. Si dia un esempio di due matrici quadrate di ordine 3 il cui prodotto sia la matrice nulla.

   Basta prendere ad esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -4 & -2 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Siano A e B due matrici quadrate di uguale dimensione. É vero che:

   - $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$;
   - $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

   Altrimenti qual é l'ipotesi mancante?
   In generale é facile mostrare che date A, B, C e D matrici quadrate di uguale dimensione si ha:
   $(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$;
   Detto questo, procediamo con lo svolgimento dell'esercizio:
   $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = AA+AB+BA+BB = A^2+AB+BA+B^2$;
   $(A+B)(A-B) = AA - AB + BA - BB = A^2 - AB + BA - B^2$
   Osserviamo ora che $AB \neq BA$ e per mostrare ciò basta svolgere qualche conto; facciamo un esempio nel caso delle matrici quadrate di ordine 2:
   $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$
   mentre nell'altro senso:
   $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$
   e ovviamente l'uguaglianza dei risultati vale solo per alcuni valori delle variabili scelte e non é quindi sempre verificata.
   Allora $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow AB = BA$;
   Stessa conclusione per l'altro punto.