GE110 Soluzioni Tutorato 2

a cura del Dott. Giordano Agostini e di Giulia Salustri e Andrea Cattaneo

Universitá degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

1. Si determini l'inversa delle seguenti matrici:

   - $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$,
   - $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$,
   - $C = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

   NB) Per la risoluzione dell'esercizio possono essere utilizzati due metodi diversi. Li utilizzeremo alternativamente
   i) Consideriamo la matrice A e affianchiamo ad essa la matrice identità, ottenendo così la seguente matrice:

   $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   A questo punto cerchiamo, tramite operazioni elementari sulle righe di A', di spostare la matrice identità sulla sinistra.
   I PASSO: Sottraiamo alla seconda riga il doppio della prima cioè applichiamo la seguente operazione elementare: $R_2 = R_2 - 2R_1$
   Otteniamo così la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
   II PASSO: Dividiamo la seconda riga per -2, cioè $R_2 = -\frac{1}{2}R_2$
   Siamo arrivati a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; possiamo subito notare che ora la matrice identità è a sinistra; ma allora:
   $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   ii) Utilizziamo l'altro metodo, sfruttando la definizione di inversa. Voglio trovare B^{-1} tale che $BB^{-1} = I$. Ma allora, usando una matrice generica:

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, da cui il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2z = 1 \\ 3y + 2t = 0 \\ -2x + 5z = 0 \\ -2y + 5t = 1 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(x, y, z, t) = (\frac{5}{19}, -\frac{2}{19}, \frac{2}{19}, \frac{3}{19})$.
Quindi $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{19} & -\frac{2}{19} \\ \frac{2}{19} & \frac{3}{19} \end{pmatrix}$

iii) Torniamo a utilizzare il primo metodo.

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 = R_2 - 7R_1]{} \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 22 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 = R_1 - R_3]{}$$
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 22 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 = R_3 + \frac{1}{7}R_2]{} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 22 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 = R_3 - \frac{1}{5}R_1]{}$$
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 22 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{35} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 = R_1 + \frac{35}{2}R_3]{} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -7 & 22 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{35} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 = R_2 + 385R_3]{}$$
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -7 & 0 & -77 & 56 & 70 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{35} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 = \frac{1}{5}R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -7 & 0 & -77 & 56 & 70 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{35} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 = -\frac{1}{7}R_2]{}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{35} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 = -\frac{35}{2}R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

NB) Per ottenere i coefficienti del sesto passaggio si ragiona così: il nostro scopo è quello di ottenere uno 0 al posto del 22 della seconda riga; per farlo, devo sfruttare necessariamente la terza; la utilizzo così: voglio trovare x t.c. $22 - \frac{2}{35}x = 0$. Risolvendo l'equazione ottengo $x = 385$. Un procedimento simile può essere seguito ogni qualvolta risulti difficoltoso trovare i coefficienti adatti da moltiplicare a una riga.

2. Si mostri che per ogni matrice invertibile A si ha che $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Se A é una matrice invertibile si ha $I = I^t = (AA^{-1})^t = (A^{-1})^t A^t$, quindi $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

3. Si mostri che l'inversa di ogni matrice simmetrica invertibile è anch'essa simmetrica.

   Una matrice è simmetrica se $A = A^t$. Ma allora:
   $A^{-1} = (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
   dove per la seconda uguaglianza abbiamo usato l'esercizio 2.

4. Si determinino, se esistono, tutte le soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni lineari, utilizzando il metodo di Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} 3y = 1 \\ x + 10y = 0 \\ 5z = 1 \end{cases}$$

   $\exists$! soluzione $(-\frac{10}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5})$

$$\begin{cases} y = 1 \\ 3x + z = 0 \\ 3x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

   $\exists \infty^1$ soluzioni del tipo $(t, 1, -3t)$

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

   $\exists \infty^1$ soluzioni del tipo $(1 - t, -t, t)$

$$\begin{cases} 3x + 5z = 0 \\ 2x + \frac{1}{3}y - z = 1 \\ 3x + y - 8z = 0 \end{cases}$$

   il sistema é incompatibile

$$\begin{cases} x - y + 2z - 5t = 0 \\ 2x + 2y + z - t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x + 4y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

il sistema é incompatibile

5. Si discuta il seguente sistema, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ hx + y + 2z = 1 \\ x + hy + z = 2 \end{cases}$$

$\exists$ soluzioni per $h \neq 2$ e $h \neq -1$ $(\frac{3}{(1+h)}, \frac{3}{1+h}, -1)$
per $h = -1$ il sistema é incompatibile;
per $h = 2$ il sistema ha ∞^1 soluzioni del tipo $(-t, 1, t)$

6. Si scrivano le seguenti matrici come prodotto di matrici elementari:

   - $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

   - $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Innanzitutto bisogna osservare che entrambe le matrici sono invertibili e che pertanto possono essere scritte come prodotto di matrici elementari. Iniziamo allora con lo svolgimento:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Tramite operazioni elementari sulle righe di A vogliamo ottenere la matrice identità (sarà più chiara ad esercizio concluso la motivazione);
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 = R_2 - 2R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.
La stessa operazione la facciamo sulle righe della matrice identità:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 = R_2 - 2R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
A questo punto possiamo scrivere:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.
Ora: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 = R_1 + \frac{2}{3}R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ e anche
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 = R_1 + \frac{2}{3}R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Otteniamo:

$\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -3\end{pmatrix}$. Infine
$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow[R_2=-\frac{1}{3}R_2]{} \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_2=-\frac{1}{3}R_2]{} \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ da cui
$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.
Tutti questi calcoli sono serviti per arrivare alla matrice I; a questo punto torniamo indietro, sostituendo successivamente tutte le uguaglianze ottenute: $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & -3\end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$
Se adesso poniamo $X = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\\0 & 1\end{pmatrix}$ e $Z = \begin{pmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{pmatrix}$ si ha $I = XYZ * A$ e quindi
$Z^{-1}Y^{-1}X^{-1} = Z^{-1}Y^{-1}X^{-1}XYZ*A = A$. Per concludere basta quindi calcolare X^{-1}, Y^{-1} e Z^{-1} con i metodi già visti nell'esercizio 1.
Per quanto riguarda la matrice B il procedimento è praticamente identico.

7. Si enunci la definizione di spazio vettoriale e si dia a K^n una struttura di spazio vettoriale sul campo K.

   Per la definizione di spazio vettoriale e per il caso di K^n si può consultare il Sernesi alle pagine 17 e 18 (definizione 1.1 ed esempio 1.2.1).