GE110 Tutorato 3

a cura di Giordano Agostini, Giulia Salustri e Andrea Cattaneo

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

1. Si stabilisca se i seguenti insiemi di vettori generano l'intero spazio $\mathbb{R}^3$, se sono linearmente dipendenti o indipendenti e se ne costituiscono una base.
   Nel caso siano indipendenti, si scriva uno di questi come combinazione lineare degli altri.
   Se possibile si trovi una combinazione lineare che dia come risultato $(1,1,1)$

   - $v_1 = (1,3,2),\ v_2 = (2,1,-1),\ v_3 = (1,2,-2)$
   - $v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (2,0,6),\ v_3 = (2,3,0)$
   - $v_1 = (4,2,1),\ v_2 = (2,1,1),\ v_3 = (4,0,5),\ v_4 = (1,1,0)$
   - $v_1 = (3,-5,2),\ v_2 = (1,3,-1)$

   Iniziamo:

   - Verifichiamo l'indipendenza lineare dei vettori: cerchiamo una combinazione lineare del tipo $a(1,3,2)+b(2,1,-1)+c(1,2,-2) = (0,0,0)$.

     $$\begin{cases} a+2b+c=0 \\ 3a+b+2c=0 \\ 2a-b-2c=0 \end{cases}$$

     poiché l'unica soluzione di questo sistema è $(0,0,0)$, si ha che l'unica combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3 che da il vettore nullo ha tutti i coefficienti nulli, quindi i vettori sono linearmente indipendenti. Essendo 3 vettori indipendenti, costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.Per trovare una combinazione lineare che dia come risultato $a(1,3,2)+b(2,1,-1)+c(1,2,-2) = (1,1,1)$, consideriamo il sistema

     $$\begin{cases} a+2b+c=1 \\ 3a+b+2c=1 \\ 2a-b-2c=1 \end{cases}$$

L'unica soluzione è $(\frac{2}{5}, \frac{7}{15}, -\frac{1}{3})$, quindi $(1,1,1) = \frac{2}{5}v_1 + \frac{7}{15}v_2 - \frac{1}{3}v_3$.

- Sono linearmente dipendenti e quindi, essendo 3, non generano $\mathbb{R}^3$. Si ha $v_2 = 2(v_3 - v_1)$, ovviamente $(1,1,1) \in < v_1, v_2, v_3 >$.

- Sono più di 3 vettori, quindi sono linearmente dipendenti; per verificare se generano $\mathbb{R}^3$, proviamo a scrivere un generico vettore $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ come combinazione lineare dei vettori $(x,y,z) = a(4,2,1) + b(2,1,1) + c(4,0,5) + d(1,1,0)$, ovvero:

$$\begin{cases} 4a + 2b + 4c + d = x \\ 2a + b + d = y \\ a + b + 5c = z \end{cases}$$

  poiché questo sistema ha soluzioni per qualsiasi valore di (x,y,z) (che considereremo parametri nella soluzione del sistema), abbiamo che ogni vettore può essere scritto come combinazione lineare dei nostri 4 vettori, che quindi sono un sistema di generatori. Si ha inoltre che $v_3 = 6v_2 - v_1 - 4v_4$, inoltre $(1,1,1) = -v_1 + 2v_2 + v_4$.
- Sono meno di 3 vettori, quindi non possono generare $\mathbb{R}^3$, ma sono linearmente indipendenti.

2. In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici:
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Si verifichi che l'insieme $K = \{A, B, C, D\}$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$ e si esprima la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ nella base di K.

Interpretiamo le matrici come vettori di $\mathbb{R}^4$ della forma $M \approx (m_11, m_12, m_21, m_22)$ ed utilizziamo il sistema per verificare l'indipendenza delle quattro matrici. Poi imponendo il sistema che ha per colonne le matrici della base portate a vettori e orlandolo con la matrice E portata a vettore (coerentemente con il modello soprascritto) e la soluzione di questo sistema è la combinazione lineare di $\{A, B, C, D\}$ che dà E.
Le soluzioni sono:

$$\begin{cases} a = -\frac{11}{21} \\ b = -\frac{13}{7} \\ c = -\frac{8}{21} \\ d = \frac{17}{21} \end{cases}$$

3. Si dica se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono spazi vettoriali:
a) $\mathcal{W}_1 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tc } a+b+c=0\}$.
b) $\mathcal{W}_2 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tc } a+b+c \leq 1\}$.
c) $\mathcal{W}_3 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tc } a^2+b^2+c^2=0\}$.
d) $\mathcal{W}_4 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tc } 2b+c=1\}$.

a) E' un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ perché è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo;
b) Non è uno spazio vettoriale, infatti se ad esempio prendiamo i vettori $v_1 = (1,0,0)$ e $v_2 = (0,0,1)$, abbiamo che $v_1 + v_2 = (1,0,1) \notin \mathcal{W}_2$;
c) $\mathcal{W}_3$ è lo spazio vettoriale nullo, infatti l'unico punto di $\mathbb{R}^3$ che appartiene a $\mathcal{W}_3$ è il punto $(0,0,0)$;
d) Non è uno spazio vettoriale; per vederlo basta prendere $v_1 = (0,0,1)$ e notare che $2v_1 \notin \mathcal{W}_4$.

4. Si mostri che i seguenti insiemi sono spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$:
a)$\mathbb{Q}(i) = \{a+ib \text{ tc } a,b \in \mathbb{Q}\}$, campo dei razionali gaussiani.
b)$\mathbb{R}$, il campo dei reali.
Si calcoli inoltre la loro dimensione.

Innanzitutto notiamo che $\mathbb{Q}(i)$ e $\mathbb{R}$ sono due campi contenenti $\mathbb{Q}$ e quindi sono entrambi dei $\mathbb{Q}$-spazi vettoriali. Una prova di ciò può essere data dal seguente enunciato:
Sia H un campo e K un suo sottocampo. Allora H è uno spazio vettoriale su K con le operazioni di somma e prodotto ivi definite.
Dimostrazione. Le prime quattro proprietà degli spazi vettoriali valgono perché, essendo H un campo, sarà necessariamente un gruppo abeliano rispetto all'addizione. SV5 e SV6 derivano direttamente dalla proprietà distributiva rispetto alle operazioni definite sul campo, la SV7 dall'associatività del prodotto sul campo e la SV8 dal fatto che l'unità moltiplicativa di K è la stessa di H. $\square$
Cerchiamo ora la loro dimensione:

(a) L'insieme $\{1,i\}$ è una base di $\mathbb{Q}(i)$ (si verifica immediatamente sia che generano lo spazio sia che sono indipendenti). Quindi $\mathbb{Q}(i)$ ha dimensione 2.

(b) Consideriamo l'insieme $\{1,\pi,\pi^2,...,\pi^n\}$: si tratta di vettori linearmente indipendenti, in quanto $a_0 + a_1\pi + ... + a_n\pi^n = 0 \Longleftrightarrow a_i = 0, \forall i$, in quanto π è trascendente; quindi se $\mathbb{R}$ avesse dimensione finita, esisterebbe un n per cui quell'insieme è un sistema di generatori. Tuttavia notiamo che π^{n+1} non appartiene al sottospazio generato da quei vettori: infatti, se vi appartenesse, per opportuni a_i si avrebbe che $\pi^{n+1} = a_n\pi^n + ... + a_1\pi + a_0$, che contraddice la suddetta trascendenza di π. Quindi $\mathbb{R}$ non ha dimensione finita su $\mathbb{Q}$.

5. Si determini una base e la dimensione dei seguenti spazi vettoriali:

   - $M_n(\mathbb{R})$
   - $\{M_n(\mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \ , \forall i \neq j\}$
   - $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$
   - $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 + x_4 = 0\}$
   - $\{f(T) \in \mathbb{R}[T]_{\leq 2} : \ f(1) = f(2) = 0\}$

   Una base per $M_n(\mathbb{R})$ è la seguente:

$$< \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} >$$

   cioè matrici nulle eccetto il posto $a_{i,j}$, occupato da 1. Pertanto la dimensione di $M_n(\mathbb{R})$ è $n \cdot n = n^2$.

   $\{M_n(\mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \ , \forall i \neq j\}$ è lo spazio delle matrici diagonali. Una base per tale spazio è:

$$< \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} >$$

   cioè matrici nulle fuori dalla diagonale e che hanno 1 alternativamente su ogni componente della diagonale. Pertanto la dimensione di $\{M_n(\mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \ , \forall i \neq j\}$ è n.

   $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ ha dimensione 2. Infatti

$x + y + z = 0 \iff x = -y - z$ e ponendo $y = s$ e $z = t$ una base sarà generata dal seguente vettore: $< (-s - t, s, t) >$. Ponendo prima $(s, t) = (1, 0)$ poi $(s, t) = (0, 1)$ otteniamo la seguente base: $< (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) >$.

$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 + x_4 = 0\}$ ha dimensione 3. Infatti risolvendo il sistema come al punto precedente otteniamo il seguente vettore-soluzione: $< (s - p, t, s, p) >$ e quindi la seguente base: $< (0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) >$.
N.B. x_2 non ha vincoli particolari; quindi qualunque suo valore è possibile cioè abbiamo posto $x_2 = t$.

Cerchiamo di capire com'è fatto l'insieme $\{f(T) \in \mathbb{R}[T]_{\leq 2} : \ f(1) = f(2) = 0\}$ utilizzando il polinomio generico di grado 2:
$f(T) = a_0 + a_1T + a_2T^2$; $f(1) = a_0 + a_1 + a_2$ e $f(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2$ quindi, poiché $f(1) = f(2) = 0$, otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $(x_0, x_1, x_2) = (2t, -3t, t)$. Ponendo $t = 1$ otteniamo la seguente base: $< 2 - 3T + T^2 >$. La dimensione è 1.

6. Si risolva, se è compatibile, il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_4 = 1 \\ -x_1 + x_4 - x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_5 = 1 \end{cases}$$

la matrice del sistema è: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Tramite operazioni elementari sulle righe o sulle colonne riduco la mia matrice a gradini; la matrice diventerà:

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, si può subito notare che il sistema è a gradini e che le soluzioni sono dipendenti da un parametro (mettendo ad esempio x_1 come parametro) e quindi il sistema avrà ∞^1 soluzioni.

7. Si determinino le coordinate dei vettori di
   $v_1 = (3, 2, -5),\ v_2 = (1, 0, -\frac{1}{2}),\ v_3 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$
   rispetto alle seguenti basi:

   - (a) La base canonica di $\mathbb{R}^3$;
   - (b) La base $B = \{(1, 1, 2), (1, 0, 1), (0, 2, 1)\}$

   Soluzioni:
   (a)

   - $v_1 = (3, 2, -5) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) \longrightarrow a = 3,\ b = 2,\ c = -5$.
   - $v_2 = (1, 0, -\frac{1}{2})$ come per v_1 le coordinate rispetto alla base canonica sono $a = 1,\ b = 0,\ c = -\frac{1}{2}$.
   - lo stesso per v_3, $a = 1,\ b = 1,\ c = 1$.

(b)

- $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, quindi risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} a+b=3 \\ a+2c=2 \\ 2a+b+c=-5 \end{cases}$$

avremo che le coordinate rispetto alla base B sono: $a=-18,\ b=21,\ c=10$.

- $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, procedendo come per v_1 le coordinate rispetto a B sono: $a=-3,\ b=4,\ c=\frac{3}{2}$.

- $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, procedendo come per v_1 e v_2 le coordinate rispetto a B sono: $a=\frac{1}{3},\ b=\frac{2}{3},\ c=\frac{1}{3}$.