GE110 Tutorato 4

a cura di Giordano Agostini, Giulia Salustri e Andrea Cattaneo

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

1. Si calcoli il rango delle seguenti matrici:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
AB, BC, CD, DA.

   Per calcolare il rango di una matrice basta lavorare sulle righe o sulle colonne della stessa tramite operazioni elementari, con lo scopo di ridurla a gradini. Se è possibile fare ciò, allora la matrice avrà rango massimo, altrimenti il rango sarà equivalente al numero di righe o colonne linearmente indipendenti.
   Detto questo, procediamo con le soluzioni:
   $r(A) = 3$, $r(B) = 2$, $r(C) = 2$, $r(D) = 2$, $r(AB) = 2$,
$$r(BC) = r\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -2 & 26 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2, \; r(CD) = r\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2, \; r(DA) = 2.$$
   Si noti che per calcolare $r(AB)$ e $r(DA)$ non è stato necessario esplicitare il prodotto: è sufficiente sapere che se $A \in GL_m(K)$, $B \in M_m, n(K)$ e $C \in GL_n(K)$, allora $r(AB) = r(B) = r(BC)$.

2. Si trovino le dimensioni di U,W,$U+W$,$U \cap W$ e una base per ognuno di essi:
   NOTA: indicheremo i generatori di U con u_i e quelli di W con v_j.

   - $U =< (1,1,-1,0),(-1,1,1,-1),(0,-1,1,1) >$
     $W =< (1,0,-1,0),(-1,-1,0,0) >$

$$U:\begin{cases} a-b=0\\ a+b-c=0\\ -a+b+c=0\\ -b+c=0\end{cases} \iff a=b=c=0$$

Quindi i vettori sono linearmente indipendenti e $dimU = 3$.

$$W:\begin{cases} a-b=0\\ -b=0\\ -a=0\\ 0=0\end{cases} \Rightarrow dim(W)=2$$

Notare che per la formula di Grassmann, $U\cap W$ ha almeno dimensione 1, dunque so già che la somma non è diretta!!
$U+W$:per la definizione di spazio somma cerco ii generatori di $U+W$ nelle basi di U e W e una base per esempio, è $< u_1, u_2, u_3, w_1 > \Rightarrow dim(U+W)=4 \Rightarrow dim(U\cap W)=1$.
$U\cap W$: prendiamo le basi di U e W e troviamo una combianazione lineare che sia comune ad entrambe; quindi poniamo $a(1,1,-1,0)+b(-1,1,1,-1)+c(0,-1,1,1) = d(1,0,-1,0)+e(-1,-1,0,0)$ e risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} a-b=d-e\\ a+b-c=-e\\ -a+b+c=-d\\ -b+c=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a=c\\ b=c\\ d=-c\\ e=-c\end{cases} \Rightarrow \ Sostituendo\ i\ valori\ trovati\ nell'\ uguaglianza\ otterremo:$$

$c(1,1,-1,0)+c(-1,1,1,-1)+c(0,-1,1,1) = -c(1,0,-1,0) - c(-1,-1,0,0)$; ora ponendo $c=1$ otteniamo il vettore $(0,1,1,0)$ che costituisce la base di $U\cap W$.

- $U =< (1,-1,0),(0,1,0),(1,1,0),(-1,-\frac{1}{2},0) >$
  $W =< (1,0,-1),(-1,0,1),(-2,0,1) >$

  U: sono linearmente dipendenti (anche perché sono 4 e sono vettori di $\mathbb{R}^3$); $dim(U)=2$ e una possibile base è $U =< u_2, u_3 >$.

W: $dim(W) = 2$ e una base è $W =< w_2, w_3 >$.
$U+W$: la somma non è diretta (per Grassmann), $dim(U+W) = 3$, $U + W =< (0, 1, 0), (1, 1, 0), (-1, 0, 1) >$.
$U \cap W$: $dim(U \cap W) = 1$ e una base è il vettore $(1, 0, 0)$.

- $U =< (1, -1, 1), (1, -1, 0) >$
  $W =< (1, 0, 0), (1, 1, 0) >$

  U: $dim(U) = 2$, $U =< u_1, u_2 >$.
  W: $dim(W) = 2$, $W =< w_1, w_2 >$.
  $U + W$: $dim(U + W) = 3$, $U + W =< u_1, u_2, w_1 >$.
  $U \cap W$: $dim(U \cap W) = 1$ e $(U \cap W) =< (1, -1, 0) >$.

- $U =< (1, 0, 0), (-1, 0, 0) >$
  $W =< (-1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 1, 1) >$

  U: $dim(U) = 1$, $U =< u_1 >$.
  W: $dim(W) = 3$, $W =< w_1, w_2, w_3 >$.
  $U + W$: $dim(U + W) = 3$, $U + W = W$.
  $U \cap W$: $dim(U \cap W) = 1$ e $(U \cap W) = U$.

- $U =< (0, 1, 1), (0, -1, -1) >$
  $W =< (1, 0, 1), (1, 0, 0), (-1, 0, 1) >$

  U: $dim(U) = 1$, $U =< u_1 >$.
  W: $dim(W) = 2$, $W =< w_1, w_2 >$.
  $U + W$: $dim(U + W) = 3$, $U + W =< u_1, w_1, w_2 >$.
  $U \cap W$: $dim(U \cap W) = 0$ ne segue che la somma è diretta.

- $U =< (1, 0, -1, 0), (-1, 0, 0, 0), (-1, 0, 1, 0) >$
  $W =< (0, -1, 0, -1), (0, 0, 0, -1), (0, -2, 0, -1) >$

  U: $dim(U) = 2$, $U =< u_1, u_2 >$.
  W: $dim(W) = 2$, $W =< w_1, w_2, >$.
  $U + W$: $dim(U + W) = 4$, $U + W =< u_1, u_2, w_1, w_2 >$.
  $U \cap W$: $dim(U \cap W) = 0$ e abbiamo che la somma è diretta.

NOTA BENISSIMO: se la somma è diretta e quindi la $dim(U \cap W) = 0$ l'intersezione non è vuota!!! Infatti conterrà sempre almeno il vettore nullo!!!

3. Si determini una base dei seguenti sottospazi e la si completi ad una base di $\mathbb{R}^n$:

   - $n = 3; < (3, 2, 1), (1, 4, 2), (1, 6, 3) >$

     Una base per il sottospazio è $< (3, 2, 1), (2, 0, 1) >$. Per poter completare questo insieme ad una base di $\mathbb{R}^3$ basta trovare un vettore linearmente indipendente con quei due (ne basta uno solo perché $dim(\mathbb{R}^3) - dim(V) = 1$); per semplificare i calcoli, possiamo sceglierlo tra quelli della base canonica perché in questo modo siamo sicuri che almeno uno dei suoi vettori non appartiene a V (altrimenti V conterrebbe anche tutte le combinazioni lineari della base canonica e quindi tutto $\mathbb{R}^3$). Quindi possiamo completare la base con il vettore $e_1 = (1, 0, 0)$.

   - $n = 3; < (2, 1, 1), (1, 3, 2), (2, -4, -2) >$

     Una base per il sottospazio è $< (2, 1, 1), (1, 3, 2) >$ e si può completare con $(0, 0, 1)$.

   - $n = 4; < (0, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 0), (2, 6, 8, 4), (2, 5, 7, 2) >$

     Una base per il sottospazio è $< (0, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 0), (2, 6, 8, 4) >$ e si può completare con $(1, 0, 0, 0)$.

   - $n = 4; < (1, 3, 2, 1), (1, -1, 0, 1), (2, 1, -2, 1), (2, -2, 0, 2) >$

     Una base per il sottospazio è $< (1, -1, 0, 1), (1, 3, 2, 0), (2, 1, -2, 1) >$ e si può completare con $(0, 0, 0, 1)$.

   - $n = 4; < (1, 0, 1, 2), (3, 0, 1, 2), (2, 0, 0, 1), (2, 0, 2, 3) >$

     Una base per il sottospazio è $< (1, 0, 1, 2), (3, 0, 1, 2), (2, 0, 0, 1) >$ e si può completare con $(0, 1, 0, 0)$.

4. Sia $A := \{f : X \to K\}$ l'insieme delle funzioni da un fissato insieme X a valori su un campo K. Dimostrare che A è uno spazio vettoriale su K con le seguenti operazioni:
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$

   Dimostriamo che l'insieme A rispetta tutte le proprietà degli spazi vettoriali.
   Proprietà associativa (SV1): $(f + g)(x) + h(x)$ =(per definizione)= $(f(x) + g(x)) + h(x)$ =(per la proprietà associativa della somma tra elementi del campo)= $f(x) + (g(x) + h(x))$ =(per definizione)= $f(x) + (g + h)(x)$.
   Esistenza dello zero (SV2): basta prendere la funzione identicamente nulla.
   Esistenza dell'opposto (SV3): $\forall f \in A$ basta considerare la funzione $-f$.
   Proprietà commutativa (SV4): deriva direttamente dalla commutatività della somma in un campo.
   Proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori (SV5): sia $k \in K$ e siano $f, g \in A$; allora si ha che $k \cdot (f + g)(x) = k \cdot (f(x) + g(x))$ =(per la proprietà distributiva del campo)= $k \cdot f(x) + k \cdot g(x) = (k \cdot f)(x) + (k \cdot g)(x)$.
   Proprietà distributiva rispetto alla somma di scalari (SV6): deriva direttamente dalla proprietà distributiva del campo.
   SV7: deriva direttamente dall'associatività del prodotto nel campo.
   SV8: ovvia.

5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono dati i sottospazi:
$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ tc } 2x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$
$K =< (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1) >$.

   - Calcolare la dimensione e una base di H e K;

     Con un procedimento analogo a quello svolto negli esercizi precedenti si può concludere che $dim(H) = 2$; infatti le soluzioni del sistema in H sono $(x_1, x_2, x_2 - 2x_1, x_1 + x_2)$, dipendono cioè da due parametri. Alternando valori diversi ai parametri ottengo la seguente base: $< (1, 0, -2, 1), (0, 1, 1, 1) >$. K è generato da due vettori linearmente indipendenti $\Rightarrow dim(K) = 2$ e tali vettori ne costituiscono una base.

- Calcolare la dimensione e una base di $H+K$. Si tratta di una somma diretta?

  Per calcolare la dimensione di $H+K$ basta vedere qual è il rango dell'insieme dei vettori contenuti nelle basi di H e di $K \Rightarrow$ studiamo la matrice dei vettori riga per calcolare il rango per righe di tale matrice (che sarà la dimensione dello spazio che sto cercando):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3=R_3-R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4=R_4-R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_4]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3=R_3+R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4=R_4+\frac{1}{2}R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

  $\Rightarrow dim(H+K) = 4$ e per Grassmann $dim(H \cap K) = 0 \Rightarrow$ la somma è diretta.

6. Sono dati, in $\mathbb{R}^4$, i sottospazi vettoriali
   $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tc } x+2y=2t=0\}$
   $K =< (1,2,0,1),(2,4,-1,1),(0,0,1,1),(1,2,4,5),(1,-1,0,5) >$.

   - Determinare la dimensione e una base di H, K, $H+K$ e $H \cap K$

     $dim(H) = 2$ infatti le soluzioni del sistema sono $(-2y,y,z,0)$ e quindi per poter trovare una base di H basta assegnare valori alternativamente diversi a y e z. Otteniamo la seguente base: $< (-2,1,0,0),(0,0,1,0) >$. Per calcolare la dimensione di K basta vedere qual è il numero di vettori linearmente indipendenti tra quelli che generano il sottospazio; in sostanza basta calcolare il rango della seguente matrice: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; si verifica facilmente che è $dim(K) = 3$ e che i tre vettori linearmente indipendenti che costituiscono una base di K sono $< (1,2,0,1),(0,0,1,1),(1,-1,0,5) >$

   - Il vettore $v = (1,2,3,4)$ appartiene a $H+K$? In caso affermativo decomporlo nella somma di un vettore di H e uno di K.

Come ampliamente spiegato, il procedimento per calcolare $dim(H+K)$ è lo stesso degli esercizi precedenti. Si ottiene $dim(H+K)=4$ e quindi per Grassmann $dim(H\cap K)=1$. In particolare $H+K=\mathbb{R}^4$ perché hanno stessa dimensione $\Rightarrow$ una base di $H+K$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Ripetiamo ora il procedimento per ottenere una base dell'intersezione: un vettore di $H\cap K$ è un vettore sia di H sia di K; ma allora deve poter essere ottenuto da una combinazione lineare dei vettori della base di K così come di quelli della base di K; la traduzione di questo fatto è la seguente:
$a(-2,1,0,0)+b(0,0,1,0)=(x,y,z,s)=c(1,2,0,1)+d(0,0,1,1)+e(1,-1,0,5)$ dove $(x,y,z,s)\in H\cap K$ è un vettore generico dell'intersezione. Dalla serie precedente di uguaglianze otteniamo:
$a(-2,1,0,0)+b(0,0,1,0)-c(1,2,0,1)-d(0,0,1,1)-e(1,-1,0,5)=0$ e dunque un sistema le cui soluzioni sono $(a,b,c,d,e)=(-3t,-26t,t,-26t,5t)$.
Sostituendo:
$-3t(-2,1,0,0)-26t(0,0,1,0)=t(1,2,0,1)-26t(0,0,1,1)+5t(1,-1,0,5)=(x,y,z,t)$ e per $t=-1$ otteniamo $(-6,3,26,0)$.

Poiché la somma tra H e K non è diretta può esistere più di un modo per scrivere il vettore $u:=(1,2,3,4)$ come somma di un vettore di H e di un vettore di K; in particolare possiamo scrivere $u=(1,2,3,4)+(0,0,0,0)$.