GE110 Tutorato 5

a cura di Giordano Agostini, Giulia Salustri e Andrea Cattaneo

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

1. Si mostri che una matrice $M \in M_{n,m}(K)$ ha rango $\leq 1 \Leftrightarrow$ esistono $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ e $(b_1, \ldots, b_n)$ tali che $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \cdot (b_1, \ldots, b_n) = M$.

   Chiamiamo A il vettore colonna $\begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$ e B il vettore riga $(b_1, ..., b_m)$:
   $\Leftarrow$ A e B hanno rispettivamente una sola colonna e una sola riga, quindi hanno entrambi rango 1. Di conseguenza, essendo $r(AB) = min(r(A), r(B))$ si avrà $r(AB) = 1$.
   $\Rightarrow$ Se $r(M) = 0$, M è la matrice nulla quindi basterà prendere come A il vettore nullo e come B un vettore qualsiasi (o viceversa). Se $r(M) = 1$, tutte le colonne di M sono multipli di una sola colonna non nulla, supponiamo sia la k-esima. Avremo quindi che $M_i = c_i M_k$, per ogni $i = 1, ..., k-1, k+1, ...m$ e per opportuni scalari c_i. Scegliendo quindi $A = M_k$ e $B = (c_1, ..., 1..., c_m)$ (con 1 nella posizione k-esima) si ha l'asserto.

2. Siano A e B due matrici quadrate di ordine n a coefficienti in un campo K. Si stabilisca quali delle seguente affermazioni sono vere:

   (a) Falsa. Controesempio:$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A + B = I_2$, $r(A) = 1 = r(B)$ ma $r(A + B) = 2$.

   (b) Falsa. Controesempio: A e B come sopra, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $r(AB) = 0$.

   (c) Vera. Dimostrazione: Se $r(A) = n = r(B)$, A e B sono invertibili e quindi abbiamo $r(AB) \leq r(A)$ (vera sempre), e inoltre $r(A) = r(ABB^{-1}) \leq r(AB)$, quindi $r(AB) = r(A) = n$.

(d) Vera. Dimostrazione: Se $r(A) = n$ e $r(B) = n$,ovviamente si avrà $min(r(A), r(B)) < n$, ma essendo $r(AB) \leq min(r(A), r(B))$ avremo che $r(AB) \leq min(r(A), r(B)) < n$, ovvero $r(AB) < n$.

(e) Falsa. Controesempio: A e B come nei primi due controesempi, si ha $det(A) = 0 = det(B)$ ma $det(A + B) = 1$.

(f) Falsa. Controesempio: $A = I_2$, $kA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; si ha $det(A) = 1$ ma $det(kA) = 4 \neq 2det(A)$.

3. Utilizzando il metodo di Kronecker-Rouché-Capelli si determinino le soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni lineari, al variare del parametro reale a:
N.B. Denoteremo con A la matrice dei coefficienti del sistema,con b la colonna dei coefficienti e con $A|b$ la matrice orlata.

$$(a) \begin{cases} x + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

Poiché la prima e la terza colonna della matrice A son uguali abbiamo che $det(A) = 0$,inoltre visto che $det(A(12|12)) = 2$, tramite il metodo dei minori orlati possiamo concludere che $r(A) = 2$. Tuttavia $r(A|c) = 3$, quindi grazie al teorema di Kronecher-Rouché-Capelli possiamo concludere che il sistema non è compatibile.

$$(b) \begin{cases} x - 2y = a \\ 3x + ay + z = 0 \\ 2ax - ay + z = a \end{cases}$$

Il $det(A) = -2a + 6$, allora se $a \neq 3$ il sistema ammette un'unica soluzione $\frac{(2a^2-2a, 2a^2-4a, -2a^3-2a^2-6a)}{-2a+6}$.
Se $a = 3$ abbiamo $r(A) = 2$ e $r(A|b) = 3$ il sistema è incompatibile.

$$(c) \begin{cases} 2x + ay + z = 0 \\ ax + y + az = 1 \\ 3x + ay - az = 0 \end{cases}$$

$Det(A) = a^3 - 2a - 3$ che non ha radici in $\mathbb{R}$, quindi $r(A) = 3$ indipendentemente dal valore di a, quindi le soluzioni del sistema sono $\frac{a^2+a, -2a-3, a}{a^3-2a-3}$.

$$(d)\begin{cases} ax + az = 1 \\ 3x + y + az = a \\ ax + 3y = 1 \end{cases}$$

$Det(A) = -4a^2 + 9a$ quindi se $0 \neq a \neq \frac{9}{4}$ il $r(A) = 3$ quindi esiste un'unica soluzione $\frac{3a^2-3a-1, -a^3+3a, -2a^2-a+9}{-4a^2+9a}$.
Per $a = 0$ oppure $a = \frac{9}{4}$ il sistema è incompatibile, infatti in entrambi i casi risulta che $r(A) = 2$ mentre $r(A|b) = 3$.

$$(e)\begin{cases} ay + az = a \\ ax + y + az = 2 \\ ax - ay - az = a \end{cases}$$

$Det(A) = a^3 - a^2$ quindi se $0 \neq a \neq 1$ il sistema ha un'unica soluzione $(2, \frac{3a-2}{a-1}, \frac{-2a+1}{a-1})$.
Se $a = 0$ il sistema ammette ∞^2 soluzioni della forma $(t, 2, s)$ con $t, s \in \mathbb{R}$; se $a = 1$ invece il sistema risulta incompatibile.

$$(f)\begin{cases} x + z = -2 \\ 2x + y + t = -1 \\ -y - 2t - 2z = 2 \\ 3x - 3y + z + t = 1 \end{cases}$$

Il sistema ammette una soluzione $(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, 1)$

4. Si calcoli il determinante delle seguenti matrici a coefficienti nel campo $K = \mathbb{Q}$.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad det(A) = (1 \cdot 0) - (1 \cdot 1) = 1,$
- $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad det(B) = (3 \cdot 1) - (2 \cdot 1) = 3 - 2 = 1,$
- $C = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad det(C) = (2 \cdot 3) - (4 \cdot a) = 6 - 4a,$
- $D = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \quad det(D) = (2 \cdot a) - (2 \cdot a) = 2a - 2a = 0,$

- $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad det(E) = (1 \cdot (\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}) + 2 \cdot (\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ a & 0 \end{vmatrix}) = 1 \cdot ((1 \cdot 1) - (1 \cdot 0)) + 2((3 \cdot 0) - (1 \cdot a)) = 1 + 2a,$

- $F = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad det(F) = (1 \cdot (\begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{vmatrix}) = 1 \cdot ((1 \cdot 1) - (c \cdot 0)) = 1,$

- $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad det(G) = (1 \cdot (\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}) - 1 \cdot (\begin{vmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix})) = (1 \cdot (-(-\frac{1}{3}) \cdot (\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}) + 1 \cdot (\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix})) - 1 \cdot (2 \cdot (\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}) - \frac{1}{3} \cdot (\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}))) = (1 \cdot (-(-\frac{1}{3}) \cdot ((1 \cdot 3) - (-1 \cdot 0)) + 1 \cdot ((1 \cdot 4) - (-1 \cdot 2))) - (1 \cdot (2 \cdot ((1 \cdot 4) - (-1 \cdot 2)) - \frac{1}{3} \cdot ((0 \cdot -1) - (3 \cdot 1))))) = (1 \cdot (\frac{1}{3} \cdot (3) + 1 \cdot (6)) - 1 \cdot (2 \cdot (6) - \frac{1}{3} \cdot (-3))) = (1 \cdot (1+6) - 1 \cdot (12+1)) = (1 \cdot (7) - 1 \cdot (13)) = 7 - 13 = -6,$.

5. Si trovino i valori del parametro reale c per cui il rango delle seguenti matrici sia massimo:

   - Visto che A è una matrice quadrata basterà determinare i valori del parametro c affinché $det(A) \neq 0$. Visto che $det(A) = 2c^2 - 3c + 1$ allora il rango di A è massimo quando $c \neq \{1.\frac{1}{2}\}$.

   - $Det(B(12|13)) = -1$ quindi per il principio dei minori orlati abbiamo che $r(B) > 2$; per vedere se rango di B è due o tre orliamo a partire dalla sottomatrice appena considerata; visto che $det(B(123|123)) = (c+1)(1-c)$ e che $det(B(123|134)) = c(2-c)$ allora si ha che $r(B) = 3$ indipendentemente dal valore che assume c infatti se $c = 0, 2$ allora la sottomatrice $B(123|123)$ ha rango massimo mentre, se $c = -1, 1$ allora la sottomatrice $B(123|134)$ ha rango massimo.

   - Come nel caso di A basterà studiare il determinante di C; visto che $det(C) = 0$ indipendentemente dal valore di c possiamo concludere che $r(C) = 4$.

- Visto che $det(D(23|23)) = 1$ indipendentemente dal valore di c allora $r(D) = 2$; orlando troviamo che $det(D(123|123)) = c(c$-1) e che $det(D(234|123)) = c(c1)$ quindi se $c = 0, 1$ possiamo concludere che $r(D) = 3$ altrimenti $r(D) = 2$, non esisterebbero infatti minori non nulli di ordine tre.

-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c & c \\ 1 & 1 & c \\ 2 & c & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & c & 2 & 1 \\ c+1 & 0 & c+1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & c & 1 & c \\ c & 2 & c & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} c & 0 & c \\ c-1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ c & 2c & c \end{pmatrix}.$$

6. Si dimostri che $det(M) = \pm 1$, con $M \in O_n(K)$ (gruppo delle matrici ortogonali $n \cdot n$ a valori in K).
   Si verifichi se $O_n(K)$ è un sottospazio vettoriale di $M_n(K)$.

   $1 = det(I) = det(G \cdot G^T) = det(G) \cdot det(G^T) = (det(G))^2$ da cui segue l'asserto.
   $O_n(K)$ non è un sottospazio vettoriale di $M_n(K)$ perché, come si può facilmente verificare, non contiene la matrice nulla.