GE110 Soluzioni Tutorato 7

a cura di Giordano Agostini, Giulia Salustri e Andrea Cattaneo

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

1. Si determinino esplicitamente al variare del parametro k, tutte le soluzioni dei seguenti sistemi lineari, utilizzando in caso di soluzione unica il metodo di Cramer:

   (a) $\begin{cases} 2y + kz = 1 \\ kx + 2y = 2 \\ y + kz = 3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} kx + z = k \\ ky + 3z = k \\ 2x + ky + z = k \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 3x + ky + 2z = 1 \\ 5x + ky + kz = 0 \\ x + kz = 1 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x + kz + w = 1 \\ x + 2y + kz + w = 0 \\ z + 2w = 2 \\ x + kw = 0 \end{cases}$.

   Nella risoluzione dei sistemi denoteremo con A la matrice dei coefficienti del sistema e con c la colonna delle soluzioni.

   (a) $Det(A) = -k^2$; quindi se $k \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$ e allora $\exists!$ soluzione data da $(\frac{6}{k}, -2, \frac{5}{k})$; se invece $k = 0$ il sistema risulta essere incompatibile in quanto $r(A) = 1$ e $r(A|c) = 2$.

   (b) $Det(A) = -2k(k+1)$; se $k \neq 0, -1$ allora $\exists!$ soluzione data da $(\frac{k}{k+1}, \frac{k-2}{k+1}, \frac{k}{k+1})$; se $k = 0$ allora il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni del tipo $(0, t, 0)$; se $k = -1$ allora il sistema risulta incompatibile.

   (c) $Det(A) = -2k(k-2)$; se $k \neq 0, -2$ allora $\exists!$ soluzione data da $(-\frac{k+4}{2k-4}, \frac{5k+2}{k(2k-4)}, \frac{3}{2k-4})$; se $k = 0$ il sistema risulta incompatibile; se $k = 2$ il sistema risulta ugualmente incompatibile.

   (d) $Det(A) = 6k-2$; se $k \neq \frac{1}{3}$ allora $\exists!$ soluzione data da $(-\frac{k(2k+1)}{3k-1}, -\frac{1}{2}, \frac{2k}{3k-1}, \frac{2k-1}{3k-1})$ se $k = \frac{1}{3}$ il sistema risulta incompatibile.

2. Si determinino le equazioni parametriche e cartesiane delle seguenti rette di $A^2(\mathbb{R})$ parallele a v e passanti per P:
(a) $P = (1, 1)$, $v = (3, 1)$;
(b) $P = (-2, 3)$, $v = (1000, -1000)$;
(c) $P = \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$, $v = (2, 1)$.

   (a) Per trovare l'equazione parametrica, è sufficiente scrivere $\begin{cases} x = x_P + x_v t \\ y = y_P + x_v t \end{cases}$,
   dove (x_P, y_P) sono le coordinate del punto P e (x_v, x_v) quelle di v; quindi in questo caso $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + t \end{cases}$.
   Per l'equazione cartesiana invece bisogna imporre il determinante $\begin{vmatrix} x - x_P & y - y_P \\ x_v & x_v \end{vmatrix} = 0$, e in questo caso avremo
   $\begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = x - 3y + 2 = 0.$

   (b) Equazione parametrica: $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - t \end{cases}$;
   equazione cartesiana: $x + y - 1 = 0$.
   (Si noti che un vettore parallelo a $(1000, -1000)$ è parallelo anche a $(1, -1)$).

   (c) $P = (2, 0) \Rightarrow$ equazione parametrica: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = t \end{cases}$;
   equazione cartesiana: $x - 2y - 2 = 0$.

3. Si stabilisca se le seguenti rette di $A^2(\mathbb{R})$ sono parallele o coincidenti, parallele e distinte, oppure incidenti; se sono incidenti, calcolare il loro punto di intersezione.
(a) $r : x + 2y - 1 = 0$, $s : -x + y - 2 = 0$;
(b) $r : 3x - 2y + 1 = 0$, $s := \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 4 + 6t \end{cases}$;
(c) $r : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$, $s : \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = \frac{8}{3} + 2t \end{cases}$

   (a) Per verificare la reciproca posizione tra le due rette nel piano affine, calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti. Si ha

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, quindi le rette sono incidenti (il sistema infatti ammette un'unica soluzione), e risolvendo il sistema si trova che il loro punto comune è $P(-1, 1)$.

(b) Passando all'equazione cartesiana di s, notiamo che i suoi coefficienti direttori sono proporzionali a quelli di r, ma il punto $(-1, -1) \in r$ non è in s, quindi le due rette sono parallele e distinte.

(c) Passando alle equazioni cartesiane di s ed r, si vede subito che le rette sono parallele e coincidenti (le equazioni sono proporzionali).

4. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\}$. Si mostri che A è uno spazio affine su $\mathbb{R}^2$. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Più in generale mostrare che l'insieme $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = f(x)\}$ è uno spazio affine su $\mathbb{R}^2$.

   Per mostrare che A è uno spazio affine su $\mathbb{R}$ è sufficiente trovare una funzione $f : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ che rispetti le proprietà $SA1$ e $SA2$. Una possibile funzione è la seguente: $f((x, x^2), (y, y^2)) \longrightarrow y - x$. Mostriamo che valgono le due proprietà:
   $SA1$ Verifichiamo che, fissato il primo punto $X = (x, x^2)$ e il vettore $v \in \mathbb{R}$,il punto $Y = (y, y^2)$ è univocamente determinato: $\overrightarrow{XY} = v \Rightarrow y - x = v \Rightarrow y = x + v$,quindi y è unico.
   $SA2$ Consideriamo $X = (x, x^2)$, $Y = (y, y^2)$ e $Z = (z, z^2)$: si ha che $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = (y - x) + (z - y) = (z - x) = \overrightarrow{XZ}$.
   La dimostrazione che B è uno spazio affine è identica a questa.

5. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine reale di dimensione 3 in cui sia fissato un riferimento affine, e siano R_h, $S \subset \mathbb{A}$ le rette di equazioni (parametriche e cartesiane rispettivamente)
   $$R_h : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - ht \\ z = 3 - t \end{cases} \qquad S : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$$
   con $h \in \mathbb{R}$.

   - Si determini la posizione reciproca di R_h, S al variare di $h \in \mathbb{R}$, e si stabilisca se $R_h \neq S, \forall h \in \mathbb{R}$.

- Per l'unico valore di h per cui R_h e S sono parallele, si determini il piano che le contiene entrambe.

Innanzitutto trasformiamo le equazioni parametriche di R_h in cartesiane. Per fare ciò basterà esplicitare il parametro t dalla prima equazione di R_h cioè $t = 1 - x$. A questo punto, sostituendo nelle altre due equazioni otteniamo:

$$\begin{cases} y = 2 - h(1-x) \\ z = 3 - (1-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} hx - y - h + 2 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}.$$

Detto questo, per calcolare la posizione reciproca di R_h e S come richiesto basterà andare ad analizzare il determinante della matrice costituita dai coefficienti delle due equazioni cartesiane, cioè:

$$det \begin{pmatrix} h & -1 & 0 & 2-h \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 6 - 6h = 0 \Longleftrightarrow h = 1.$$

Abbiamo ottenuto che le due rette sono complanari solo se $h = 1$. Per tutti gli altri valori di h le due rette risultano sghembe.
Trasformiamo ora le equazioni di S da cartesiane a parametriche. Ovviamente basterà risolvere il sistema costituito proprio dalle equazioni cartesiane di S al variare del parametro t (il sistema presenta ∞^1 soluzioni). Otteniamo: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$. Tali equazioni ci aiutano a ricavare la giacitura di S (basta guardare i coefficienti del parametro t nelle 3 equazioni): $v = (1, 1, 1)$. Allo stesso modo ricaviamo la giacitura di R_h: $w = (-1, -h, -1)$. Le due giaciture risultano multiple solo nel caso in cui $h = 1$, che è esattamente l'unico valore per il quale le due rette sono complanari. Osserviamo che il sistema delle equazioni cartesiane, per $h = 1$, non ammette soluzioni, quindi le due rette sono parallele distinte. Poniamo allora $h = 1$ e cerchiamo l'equazione del piano che le contiene entrambe. Una giacitura del piano sarà v, l'altra sarà $PQ = (1-1, -1-2, 0-3) = (0, -3, -3)$ dove $P = (1, 2, 3)$ è un punto di R_1 (ricavato dai termini noti delle equazioni parametriche di R_h) e $Q = (1, -1, 0)$ è un punto di S (stesso motivo). Un punto del piano, infine, sarà ad esempio P.

Le equazioni parametriche del piano saranno quindi $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t - 3s \\ x = 3 + t - 3s \end{cases}$.

Il passaggio a equazioni cartesiane è lasciato al lettore.

6. Siano $r : x + y - 2 = 0$ e $s : 2x - y + 3 = 0$ due rette del piano affine reale Φ il fascio di rette passante per l'origine $O(0, 0)$. Trovare:

   - Il punto $P = r \cap s$.
   - Equazioni parametriche della retta $t \in \Phi$ passante per P.
   - Equazioni cartesiane della retta $u \in \Psi$ passante per $Q(1, 1)$, dove Ψ è il fascio improprio di rette parallele a t.
   - Il punto $R = s \cap u$.

   Notiamo innanzitutto che $\Phi : \lambda x + \mu y = 0$, con λ e μ parametri omogenei.

   (a) Per trovare P cerchiamo la soluzione del sistema $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$ e troviamo $P = (-\frac{1}{3}, \frac{7}{3})$.

   (b) Considerando l'equazione di Φ e imponendo il passaggio per P si trova $\lambda = 7$, $\mu = 1$ (si noti che andava bene anche una qualsiasi altra coppia proporzionale a $(7, 1)$) e quindi l'equazione cartesiana di t è $7x + y = 0$. L'equazione parametrica invece è $\begin{cases} x = t \\ y = -7t \end{cases}$.

   (c) L'equazione del fascio Ψ è $7x + y + c = 0$ con c parametro reale. Imponendo il passaggio per $Q(1, 1)$ troviamo che $8 + c = 0$ quindi $c = -8$ e quindi l'equazione cercata è $7x + y - 8 = 0$.

   (d) Mettendo a sistema le equazioni cartesiane delle due rette si trova $R = (\frac{5}{9}, \frac{37}{9})$.