GE110 Tutorato 8

a cura di Giordano Agostini, Giulia Salustri e Andrea Cattaneo

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

1. Si scrivano l'equazione del piano E soddisfacente alle seguenti proprietà:
   (a) passante per $A(1,1,0)$ e parallelo ai vettori $u=(1,0,1)$ e $v=(0,2,3)$.
   (b) passante per $B(0,1,1)$ e $C(3,2,1)$ e parallelo a $w=(0,0,5)$.

   Per quanto riguarda il primo punto abbiamo gratis tutte le informazioni necessarie per determinare le equazioni parametriche del piano cercato che risulta essere passante per A ed avere giacitura $<u,v>$.
   Per quanto riguarda il secondo punto scegliamo B come punto noto ed otteniamo che la giacitura del piano è $<(3,1,0),w>$ e possiamo procedere nel calcolare l'equazione cartesiana in maniera usuale.
   Le soluzioni trovate sono:
   (a) $2x+3y-2z-5=0$.
   (b) $x-3y+3=0$.

2. Dati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ si dica quali tra questi sono suoi sottospazi affini:
   (a) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x+y+z=0\}$;
   (b) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2=1\}$;
   (c) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x-3y=5\}$;
   (d) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2-y=0\}$.

   (a) (c) L'equazione del sottoinsieme è un sistema(anche se formato da una sola riga) di equazioni lineari, le cui soluzioni sono un sottospazio affine (c'è un teorema).
   (b) No; per vederlo possiamo considerare la seguente dimostrazione per assurdo: ipotizziamo che il sottoinsieme (che chiameremo A) sia un sottospazio affine di $\mathbb{A}^3$,dunque $A=S_{P\cdot W}$, per qualche $P\in\mathbb{A}^3$ e per qualche W sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

In particolare W sarà la giacitura di A, e dati due punti $P, Q \in A \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \in W$.
Considerando ora i seguenti punti, $P_1 = (1,0,1), Q_1 = (1,0,2), P_2 = (0,-1,0), Q_2 = (0,1,0), P_3 = (-1,0,0), Q_3 = (1,0,0)$, abbiamo che $\overrightarrow{P_1Q_1}, \overrightarrow{P_2Q_2}, \overrightarrow{P_3Q_3} \in W$; ma questi tre vettori sono tra loro linearmente indipendenti, dunque $W = \mathbb{R}^3$.
Dunque $A = \mathbb{A}^3$, il che è assurdo perchè ci sono punti che non appartengono ad A (ad esempio il punto $(0,0,0)$ non soddisfa l'equazione $x^2 + y^2 = 1$).
(d) No (si può ripetere un ragionamento simile a quello del punto b).

3. Dati i seguenti sottospazi affini si trovi una base della loro giacitura:
(a) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_3 - x_4 = e\}$;
(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -x + z - 5y = 3\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y = 5\}$;
(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = -1 \wedge x = 2\}$.

(a) $\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,1,1)\}$;
(b) $\{(5,0,5)\}$;
(c) $\{(0,1,0)\}$.

4. Sia $A^2(\mathbb{R})$ il $2-$*spazio* affine numerico, sia $O\mathbb{E}_1\mathbb{E}_2$ il sistema di riferimento standard:
(a) si trovino le equazioni parametriche e cartesiana della retta r passante per $P = (1,2)$ e k al vettore $\vec{v} = (1, -\frac{1}{2})$;
(b) si consideri la retta s passante per i punti $Q = (0, -\frac{3}{2})$ e $R = (-1, 2)$, si trovino le equazioni parametriche e cartesiana;
(c) r e s sono sghembe? Sono parallele? Sono incidenti? (Giustificare la risposta);
(d) si trovino gli eventuali punti in comune;
(e) si determinino le equazione della retta π del fascio proprio con centro il punto $S = (-\frac{4}{3}, \frac{19}{6})$ passante per $O = (0,0)$;
(f) si scriva l'equazione del fascio improprio di rette $||$ a π.

(a) $x + 2y - 5 = 0$ $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{5}{2} - \frac{t}{2} \end{cases}$;
(b) $7x + 2y + 3 = 0$ $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2}t \end{cases}$;

(c) Due rette nel piano non possono essere sghembe, non sono parallele perchè non hanno la stessa giacitura, quindi sono incidenti.
(d)Il punto in comune è $S = (-\frac{4}{3}, \frac{19}{6})$;
(e) $19x + 8y = 0$;
(f) $19x + 8y + t = 0$.

5. Si trovi per ogni coppia di punti $A, B, C \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ la retta passante per essi, e si trovi poi il piano in cui sono contenuti. Quando c'è un parametro, discuterlo.

   - $A = (1, 1, 0)$ $B = (1, 0, 1)$ $C = (1, 0, 0)$.
   - $A = (0, 0, 0)$ $B = (1, 2k, k)$ $C = (k, k, 2)$.
   - $A = (1, k, k)$ $B = (2, 2k, 2)$ $C = (k, 1, 1)$.

   Iniziamo con la risoluzione dell'esercizio:

   - Troviamo dapprima la retta r passante per A e B. Tale retta avrà giacitura $v = (1-1, 0-1, 1-0) = (0, -1, 1)$ e passerà ad esempio per A; le sue equazioni parametriche saranno quindi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$. Allo stesso modo troviamo che la retta per B e C avrà giacitura $w = (1-1, 0-0, 0-1) = (0, 0, -1)$ e passerà ad esempio per B;
     le sue equazioni parametriche saranno $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}$.
     Il piano per A, B e C avrà giaciture v e w e passerà per A:
     $$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = t - s \end{cases}$$
   - Come prima, $v = (1, 2k, k)$ e $w = (k, k, 2)$. Studiamo per quali valori di k i 3 punti sono allineati; ciò equivale a studiare i valori di k per i quali le 2 giaciture sono una multipla dell'altra cioè per i quali il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2k & k \\ k & k & 2 \end{pmatrix}$ è minimo. Studiando tutti i minori di ordine 2 notiamo che non esiste un k che li annulla tutti e tre contemporaneamente pertanto r e s non sono mai parallele,

dove abbiamo indicato con r e s rispettivamente la retta per A, B con giacitura v e la retta per A e C con giacitura w. Le loro equazioni parametriche, pertanto, sono:
$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2kt \\ z = kt \end{cases}$, $s : \begin{cases} x = kt \\ y = kt \\ z = 2t \end{cases}$.
A questo punto il piano che ci interessa passerà ad esempio per A e avrà giaciture v e w.

$$\begin{cases} x = t + ks \\ y = 2kt + ks \\ z = kt + 2s \end{cases}$$

- Il ragionamento è identico al precedente. Per $k = 1$ i tre punti risultano allineati e pertanto esisteranno infiniti piani che li contengono tutti e tre. Il caso $k \neq 1$ si fa come al solito.

6. In $\mathbb{A}^3$:

- Si scriva l'equazione del piano α passante per i punti $A(1, 0, 0)$, $B = (2, 1, 1)$ e $D = (0, 1, 1)$.
- Si scriva l'equazione del piano β contenente le rette $r : \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 11 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ \frac{1}{4}y - z = -2 \end{cases}$.
- Si determini se i due piani sono paralleli o incidenti.

Iniziamo con la risoluzione dell'esercizio:

- Come nella risoluzione dell'esercizio precedente, troviamo che $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ e $\overrightarrow{AD} = (-1, 1, 1)$ quindi $giac(\alpha) =< (1, 1, 1), (-1, 1, 1) >$ e le equazioni parametriche di α saranno: $\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = t + s \\ z = t + s \end{cases}$; notiamo che $y = z$ pertanto quest'ultima è proprio l'equazione cartesiana di α
- Per trovare la giacitura di r basterà risolvere il sistema omogeneo determinato dalle equazioni cartesiane di r; otteniamo $giac(r) =< (1, 0, 0) >$. Allo stesso modo: $giac(s) =< (1, 4, 1) >$. Il piano β

avrà equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 4s \\ z = 1 + t + s \end{cases}$ e, come prima, si nota immediatamente che $x = z$ che corrisponde all'equazione cartesiana di β.

- Per determinare se i due piani sono paralleli o incidenti basterà analizzare la loro intersezione risolvendo il seguente sistema: $\begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$. Otteniamo $giac(\alpha \cap \beta) =< (1,1,1) >$. I due piani sono incidenti.