GE110 Soluzioni Tutorato 9

a cura di Giordano Agostini, Giulia Salustri e Andrea Cattaneo

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

1. Si consideri la matrice $W = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & 0\dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & x \end{pmatrix}$.
   Mostrare che $DetW = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$.

   La soluzione di questo esercizio è lasciata come calcolo allo studente.

2. Sia $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ lo spazio affine reale di dimensione 2 e $O(e_1, e_2)$ un riferimento affine. Si consideri il triangolo di vertici $O(0,0)$, $A(-2,0)$ e $B(-1,2)$. Trovare il suo baricentro (punto di intersezione delle mediane).

   Osservazione: dati $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C) \Rightarrow Bar(A, B, C) = (\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3})$. Tuttavia proveremo a risolvere l'esercizio sfruttando le nozioni di geometria affine.
   $O(0,0)$, $A(-2,0)$, $B(-1,2)$. Sappiamo che le mediane di un triangolo si incontrano tutte nel baricentro, quindi, piuttosto che lavorare con tre mediane, basterà trovare l'intersezione di due a caso. Per definizione la mediana congiunge il punto medio di un segmento col vertice opposto a quest'ultimo.
   Troviamo $M_{OA} = (\frac{-2+0}{2}, \frac{0}{2}) = (-1, 0)$ e $M_{AB} = (\frac{-2-1}{2}, \frac{2}{2}) = (-\frac{3}{2}, 1)$. Sia ora v_{OA} la giacitura della mediana in M_{OA} (ovviamente parte da B). Allora $V_{OA} = (-1-(-1), 2-0) = (0,2)$ e allo stesso modo $V_{AB} = (0 + \frac{3}{2}, 0 - 1) = (\frac{3}{2}, -1)$.
   A questo punto per trovare il baricentro basterà intersecare le due mediane di equazioni parametriche: $m_{OA} : \begin{cases} x = -1 \\ y = 2t \end{cases}$, $m_{AB} : \begin{cases} x = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}t \\ y = 1 - t \end{cases}$
   e cartesiane: $m_{OA} = X + 1 = 0$, $m_{AB} = X + \frac{3}{2}Y = 0$.
   Il sistema formato dalle due equazioni cartesiane ha come soluzione il punto $Bar(-1, \frac{2}{3})$.

3. Si consideri lo spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

(a) Sia r la retta di equazioni cartesiane: $r : \begin{cases} x + 2z + 1 = 0 \\ 2x + y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$

Determinare le equazioni parametriche di r.

(b) Sia s la retta di equazioni cartesiane: $s : \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 2x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$

Dire se r ed s sono parallele, sghembe o incidenti. Nel caso in cui risultino incidenti determinare il loro punto di intersezione.

(c) Determinare le equazioni cartesiane della retta t complanare con le rette r ed s e passante per il punto $P = (1, 0, 1)$.

(d) Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta q passante per il punto $Q = (1, 0, 0)$ e parallela al vettore $v = (1, -1, 4)$.

(e) Dire se t ed q sono parallele, sghembe o incidenti. Nel caso in cui risultino incidenti determinare il punto di intersezione.

(a) Per trovare un vettore di direzione della retta r basta imporre $w = (l, m, n)$ dove $l = det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad m = -det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad n = det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Prendendo il punto $(-1, 1, 0)$ (andava bene un qualsiasi punto della retta) possiamo scrivere:

$$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} .$$

(b) Sia A la matrice le cui righe sono determinate dai coefficienti dei piani che individuano le due rette r ed s, allora abbiamo che le due rette sono complanari (incidenti o parallele) se e soltanto se $det(A) = 0$.In questo caso si vede che $det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -4$.

Possiamo quindi concludere che le rette r ed s sono sghembe.

(c) Innanzitutto notiamo che esiste un unico piano p' tale che p' contiene sia la retta r che il punto P (equivalentemente che esiste un unico piano p'' tale che p'' contiene sia la retta s che il punto P), inoltre i piani p' e p'' sono distinti (altrimenti r ed s sarebbero complanari) ed hanno un punto in comune, quindi $p' \cap p'' = t$ come richiesto. Quindi utilizzando il fascio proprio di piani di asse r, $\lambda(x+2z+1)+\mu(2x+y+3z+1) = 0$, imponendo il passaggio per il punto P otteniamo $4\lambda+6\mu = 0$, scegliendo ad esempio $\lambda = -3$ e $\mu = 2$ (andavano bene due qualsiasi valori di λ

e di μ che risolvevano l'equazione)troviamo il piano $p' : x+2y-1=0$; utilizzando un procedimento analogo con il fascio di piani di asse s, $\lambda(x+1)+\mu(2x+3y+1)=0$ imponiamo il passaggio per il punto P e otteniamo $2\lambda+3\mu=0$ allora $p'' : x+6y-1=0$. Allora le equazioni cartesiane di $t = p' \cap p''$:
$\begin{cases} x+2y-1=0 \\ x+6y-1=0 \end{cases}$.
(d) Le equazioni parametriche di q sono:
$\begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=4t \end{cases}$
Scrivendo la matrice: $\begin{pmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
e annullando due qualsiasi dei suoi minori otteniamo le equazioni cartesiane di q:
$\begin{cases} -x-y+1=0 \\ 4y+z=0 \end{cases}$.
(e) Per vedere se le rette t e q sono parallele, incidenti o sghembe comincio con vedere il rango della matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
Si nota subito che $det(B)=0$, Inoltre si può vedere che la sottomatrice $B(123|123)$ è invertibile (ha rango massimo). Quindi per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema ha un'unica soluzione (in altre parole le rette sono incidenti) e il punto di intersezione è il punto $(1,0,0)$.

4. Esercizio dal secondo appello 2010/2011:
Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ siano (x,y,z) le coordinate di un generico punto rispetto al riferimento affine standard. Per ogni $h \in \mathbb{R}$, si considerino i piani K,L,M di equazioni cartesiane $hx+(h+1)y+(h+2)z=1$, $hx+(h-1)y+(h-2)z=1$, $x+y+z=h$ rispettivamente.
(a) Si determinino i valori di h per cui $R := K \cap L \cap M \neq$ e, per ciascuno di tali valori,si calcoli $dim(R)$.
D'ora in avanti, sia $h=1$.
(b) Dopo aver verificato che R è la retta per $(1,0,0)$ e $(2,-2,1)$, si trovi il più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{A}^3_R$ contenente R e la retta S di equazioni cartesiane $y=z=0$.
(c) Si determini il più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{A}^3_R$ contenente R,S

e la retta T di equazioni cartesiane $x = z = 0$.

(a) Studiamo il seguente determinante: $det \begin{pmatrix} h & h+1 & h+2 & 1 \\ h & h-1 & h-2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & h \end{pmatrix}$.
Nella matrice sono presenti tutte e tre le equazioni cartesiane dei piani e sono state inserite perché se $det = 0$ significa che la retta $K \cap L : \begin{cases} hx + (h+1)y + (h+2)z = 1 \\ hx + (h-1)y + (h-2)z = 1 \end{cases}$ e il piano $M : x+y+z = h$ sono complanari. Dallo studio del determinante concludiamo che la retta e il piano in questione sono complanari $\Leftrightarrow det = 0 \Leftrightarrow h = \pm 1$. Per tutti gli altri valori di h sono paralleli. Detto questo, è facile verificare che i risultati sono gli stessi anche considerando le rette $K \cap M$ o $L \cap M$ e i piani L o K rispettivamente. Quindi $R := K \cap L \cap M \neq \emptyset \Leftrightarrow h = \pm 1$. Per verificare la dimensione di R basterà sostituire i valori di h trovati e studiare le soluzioni del sistema costituito dalle equazioni cartesiane dei tre piani.
Poniamo da ora in avanti $h = 1$.

(b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Le soluzioni di tale sistema sono generate dalla tripla $< (1+t, -2t, t) >$ e ponendo $t = 0, 1$ otteniamo esattamente i punti richiesti, pertanto R sarà proprio la retta per $(1, 0, 0)$ e $(2, -2, 1)$. Ora, il più piccolo spazio affine contenente due rette è un piano se le rette non sono né sghembe né parallele coincidenti; in questi due casi, invece, sarà lo spazio e la retta rispettivamente. Basterà dunque andare a calcolare la posizione reciproca delle due rette.

(c) Il ragionamento è identico.

5. Si risolvano con il metodo di Cramer i seguenti sistemi:
$(a) \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -x + y + z = 3 \\ x - y + 3z = -1 \end{cases}$; $(b) \begin{cases} x + z - t = 1 \\ y - z + t = 0 \\ x + y - z = -1 \\ -y + 2z + t = 1 \end{cases}$.

(a) La soluzione del sistema è $(-\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})$;
(b) La soluzione del sistema è $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 2, -\frac{1}{2})$

6. Verificare che le seguenti applicazioni sono lineari e determinarne nucleo ed immagine:
(a) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita come $(x, y, z) \longrightarrow (2z-x, x+y, x+2y+2z)$;
(b) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita come $(x, y) \longrightarrow (x-2y, 2x+y, 5y, 3x-y)$;
(c) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita come $(x, y, z) \longrightarrow (x+y-z, x-y+z)$.

(a) Cominciamo con il verificare che F è un'applicazione lineare. Presi $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ e $w = (d, e, f) \in \mathbb{R}^3$ abbiamo che $F(v+w) = F(a+d, b+e, c+f) = (2(c+f)-(a+d), (a+d)+(b+e), (a+d)+2(b+e)+2(c+f)) = ((2c-a)+(2f-d), (a+b)+(d+e), (a+2b+2c)+(d+2e+2f)) = (2c-a, a+b, a+2b+2c)+(2f-d, d+e, d+2e+2f) = F(v)+F(w)$.
Inoltre abbiamo che, preso $k \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^3$, con $v = (a, b, c)$, vale $F(kv) = F(ka, kb, kc) = (2kc - ka, ka + kb, ka + 2kb + 2kc) = (k(2c-a), k(a+b), k(a+2b+2c)) = k(2c-a, a+b, a+2b+2c) = kF(v)$.
Per determinare l'immagine basta osservare che in generale $Im(F) =< F(e_1), F(e_2), F(e_3) >$ dove con e_i, $i = 1, 2, 3$ indichiamo i vettori di una base fissata. Nel nostro caso prendendo come base la base canonica di $\mathbb{R}^3$, otteniamo che $Im(F) =< (-1, 1, 1), (0, 1, 2), (2, 0, 2) >=< (0, 1, 2), (2, 0, 2) >$, possiamo quindi concludere che $dim(Im(F)) = 2$ e che, per il teorema del rango più nullità abbiamo che $dim(ker(F)) = 1$. Per determinare il nucleo di F basta porre $F(v) = (0, 0, 0)$ e risolvere il sistema omogeneo con il metodo di Gauss-Jordan (non è l'unico modo di trovare le soluzioni), così facendo troviamo che $ker(F) = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a, b, c) = (t, -t, t/2), t \in \mathbb{R}$.

(b) $Im(F) =< (1, 2, 0, 3), (-2, 1, 5, -1) >$, $ker(F) = (0, 0)$.

(c) $Im(F) =< (1, 1), (-1, 1), (-1, 1) >=< (1, 1), (-1, 1) >= \mathbb{R}^2$. Il nucleo avrà quindi dimensione 1 e per trovarlo imponiamo $F(v) = (0, 0)$ e otteniamo $ker(F) = (0, t, t)$.