GE110 Tutorato 10

a cura di Giordano Agostini, Giulia Salustri e Andrea Cattaneo

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

1. Sia f l'operatore di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è:

   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Calcolare $Dim(Ker(f))$ e $Dim(Im(f))$

2. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita come $F(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 - \frac{1}{3}x_2, 2x_1 + x_2)$; sia inoltre $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita come $G(y_1, y_2, y_3) = (-y_1 + y_3, \frac{y_1}{2} + y_2 - 3y_3)$.
   Le applicazioni F e G sono iniettive? E suriettive?

3. Si stabilisca, al variare del parametro reale b, quando le seguenti matrici sono invertibili. Se invertibili, trovare l'inversa.

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & b \\ b & b & 0 \\ -1 & 0 & b \end{pmatrix}$$

   $$B = \begin{pmatrix} b & b & 1 \\ 1 & b & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   $$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & b & -1 \\ 3 & 2 & b \end{pmatrix}$$

   $$D = \begin{pmatrix} 2b & -1 & b \\ 2 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Siano $v = \{(1,1,-1),(1,-1,-1),(-1,-1,-1)\}$ e
$w = \{(1,0,1,-1),(-1,1,1,0),(0,0,1,-1),(1,0,-1,-1)\}$
due basi rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ e siano F, G, H, I le seguenti applicazioni lineari:
$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) = (x+z, x+2y, 2x+3y+z)$
$G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $G(x,y,z) = (x+z, x+y+z, x-y+2z, 2x+y+2z)$
$H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $H(x,y,z,w) = (x+2z+w, x-y-z+w, y-w)$
$I : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $I(x,y,z,w) = (x+z+w, 2x+y+w, x-y-2z+w, y-z+w)$
Determinare le matrici $M_v(F)$, $M_{w,v}(G)$, $M_{v,w}(H)$ e $M_w(I)$ associate a tali applicazioni.

5. Sia f l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ cui, rispetto alla base canonica, è associata la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}$ con $h \in \mathbb{R}$.
Trovato il valore di h per cui f non è suriettiva:
   (a) determinare $Im(f)$;
   (b) determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, k^2 - k, k)$ appartiene a $Im(f)$;
   (c) trovare un vettore di $\mathbb{R}^3$ privo di controimmagini;
   (d) determinare $Ker(f)$;
   (e) verificare che $Ker(f) \cap Im(f) = \{\underline{0}\}$;
   (f) esistono dei vettori $u \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(u) = (3,2,-2)$?
   (g) trovare i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = f(x)$, dove $f(x) = (1,2,-1)$.