GE110 Tutorato 11

a cura di Giordano Agostini, Giulia Salustri e Andrea Cattaneo

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

1. Sia $T \in End(\mathbb{R}^3)$ l'applicazione lineare tale che: $T(0,1,2) = (2,0,1)$, $T(1,0,1) = (0,-1,1)$ e $T(1,1,0) = (1,1,0)$.
   Trovare le matrici di cambiamento di base $M_{E,B}(\mathbb{I}_3)$ e $M_{B,E}(\mathbb{I}_3)$, dove E è la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $B = \{(0,-1,-1),(2,0,1),(1,1,0)\}$ e le matrici che rappresentano T rispetto a queste due basi.

2. Siano A e B due matrici simili; si dimostri che:
   (a) $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$;
   (b) $tr(A) = tr(B)$;
   (c) A^n e B^n sono simili.

3. Per ognuno dei seguenti operatori lineari F, G, $H : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, verificare se sono diagonalizzabili; in tal caso, trovare una base $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ di autovettori, scrivere la formula di passaggio da $M_e(\star)$ a $M_b(\star)$ ($\star = F, G, H$ rispettivamente), dove $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica, e verificare che quest'ultima matrice è diagonale:
   $F(x,y,z) = (x+z, -x+y, x+z)$;
   $G(x,y,z) = (x+2z, 2x+y, x+y+z)$;
   $H(x,y,z) = (x-y+2z, -x+y-z, 2x+y+z)$.

4. Trovare gli autovalori e gli autovettori delle seguenti matrici:
   $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,
   $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Stabilire poi se sono o meno diagonalizzabili.

5. Si consideri la matrice simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

(a) Decidere se A è invertibile e, in caso affermativo, determinare A^{-1};
(b) Calcolare gli autovalori e gli autospazi di A;
(c) Determinare una matrice P tale che $P^{-1}AP = D$, dove D è una matrice diagonale.

6. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Dopo aver trovato l'endomorfismo a essa associato, si verifichi se A è diagonalizzabile.